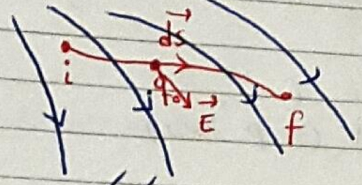
محاسبه پتانسیل با استفاده از میدان:

فرض کنید میدان الکتریکی $\vec{E}$ معلوم باشد و خطوط میدان به صورت زیر نشان داده شده باشد:



می‌خواهیم اختلاف پتانسیل بین دو نقطه i و f را محاسبه کنیم

برای محاسبه اختلاف پتانسیل $V_f - V_i$ کافی است کار میدان الکتریکی را در جابجایی بار آزمون q_0 از نقطه i به نقطه f به دست آوریم:

$$W = \int dW = \int \vec{F} \cdot \vec{ds} \qquad \vec{F} = q_0 \vec{E}$$

$$= \int_i^f q_0 \vec{E} \cdot \vec{ds}$$

$$= q_0 \int_i^f \vec{E} \cdot \vec{ds}$$

$\vec{ds}$: بردار المان جابجایی در طول مسیر

از آنجا که دیدیم $\Delta V = V_f - V_i = -\frac{W}{q}$ خواهیم داشت:

$$\boxed{V_f - V_i = -\int_i^f \vec{E} \cdot \vec{ds}}$$

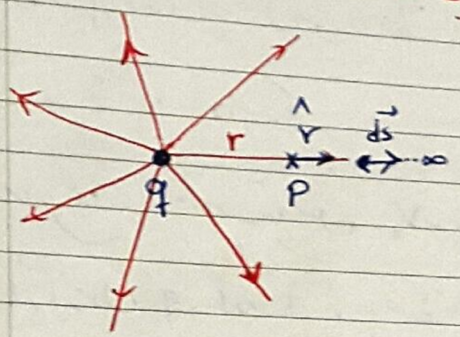
با توجه به پایستار بودن نیروی کولنی، مسیر انتخاب شده اهمیتی ندارد چون همه مسیرها به نتیجه یکسان منجر می‌شود.

★ اگر پتانسیل در یکی از نقاط مثلاً i صفر باشد یعنی $V_i = 0$ (این نقطه را مرجع پتانسیل می‌گیریم) در نتیجه:

$$\boxed{V_f = -\int_\infty^f \vec{E} \cdot \vec{ds}}$$

پتانسیل ناشی از یک بار نقطه‌ای

(هدف: محاسبه پتانسیل در نقطه‌ای به فاصله r از یک بار نقطه‌ای q)



$V_f = 0$ (در ∞)

$V_i = V$ (در نقطه P)

$$V_f - V_i = -\int_i^f \vec{E}\cdot\vec{ds} \qquad \vec{E} = \frac{kq}{r^2}\hat{r}$$

$$0 - V = -\int_r^{\infty} \frac{kq}{r^2}\,\hat{r}\cdot\vec{ds}$$

$$\hat{r}\cdot\vec{ds} = ds\cos\theta = +ds$$

$$\Rightarrow -V = -\int_r^{\infty} \frac{kq}{r^2}\,ds$$

$\vec{ds}$ در راستای $\vec{dr}$ است پس می‌توان نوشت: $\vec{ds} = \vec{dr}$

$$\rightarrow V = \int_r^{\infty} \frac{kq}{r^2}\,dr = kq\int_r^{\infty}\frac{dr}{r^2} = kq\left(\frac{-1}{r}\right)_r^{\infty} = \frac{kq}{r}$$

$\boxed{V = \frac{kq}{r}}$ → پتانسیل ناشی از هر بار نقطه‌ای در فاصله r از آن

اگر $q>0$ ← پتانسیل نقاط اطراف آن مثبت است.

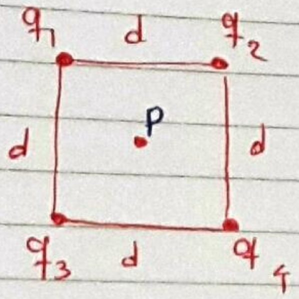
اگر $q<0$ ← 〃 〃 〃 منفی است.

پتانسیل ناشی از گروه بارهای نقطه‌ای (توزیع بار گسسته)

طبق اصل برهم نهی:

$$V=\sum_{i=1}^{n} V_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{kq_i}{r_i}$$

این یک جمع اسکالر یا عددی است (جمع جبری) و علامت بارها باید در نظر گرفته شود.

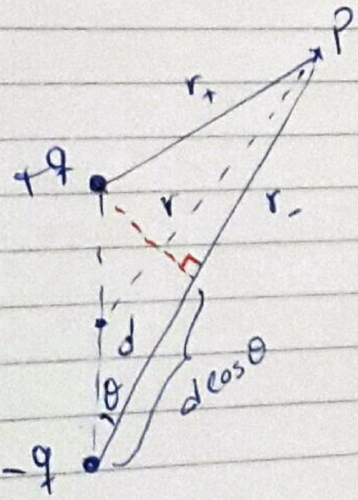


مثال: پتانسیل را در نقطه P (مرکز مربع) محاسبه کنید.

$q_1 = 12\ nC$ $\quad$ $q_3 = 31\ nC$

$q_2 = -24\ nC$ $\quad$ $q_4 = 17\ nC$

پتانسیل ناشی از دوقطبی الکتریکی.



$$V = V_+ + V_- = k\left(\frac{q}{r_+} + \frac{-q}{r_-}\right)$$

$$= kq\left(\frac{r_- - r_+}{r_+ r_-}\right)$$

تقریب فواصل دور ($r >> d$):

$$\begin{cases} r_- - r_+ \simeq d\cos\theta \\ r_+ r_- \approx r^2 \end{cases} \rightarrow V \simeq kq\left(\frac{d\cos\theta}{r^2}\right)$$

$$\boxed{= k\frac{p\cos\theta}{r^2}}$$

($p = qd$ گشتاور دوقطبی الکتریکی)

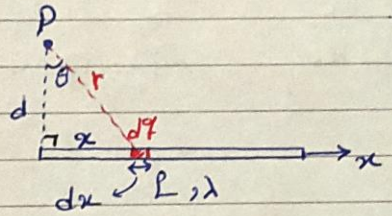
پتانسیل ناشی از توزیع بار پیوسته

$$V = \int dV = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r}$$
$$= \boxed{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq}{r}}$$

r: فاصله بین المان dq و نقطه‌ای که می‌خواهیم پتانسیل را محاسبه کنیم.

مثال: توزیع بار خطی

میله نارسانای نازکی به طول L و با چگالی بار یکنواخت λ داریم. پتانسیل ناشی از آن را در نقطه P به فاصله عمودی d از انتهای میله به دست آورید.



حل:

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r}$$
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{\lambda\, dx}{(x^2+d^2)^{1/2}}$$

$$\rightarrow \int dV = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^L \frac{dx}{(x^2+d^2)^{1/2}}$$

برای حل این انتگرال از تغییر متغیر $tg\theta$ استفاده می‌کنیم:

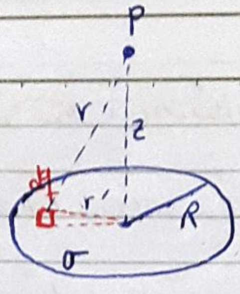
$$tg\theta = \frac{x}{d} \rightarrow x = d\,tg\theta$$
$$\Rightarrow dx = d(1+tg^2\theta)\,d\theta = d\sec^2\theta\, d\theta$$

$$\int \frac{d\sec^2\theta\, d\theta}{(d^2 tg^2\theta + d^2)^{1/2}} = \int \frac{d\sec^2\theta\, d\theta}{d\sec\theta} = \int \sec\theta\, d\theta = \ln|\sec\theta + tg\theta|$$

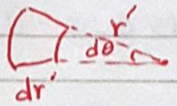
$$= \ln\left|\frac{r}{d} + \frac{x}{d}\right|_0^L = \ln\left|\frac{r+x}{d}\right|_0^L = \ln(r+x) - \ln d\,\Big|^L$$
$$= \ln\left((L^2+d^2)^{1/2} + L\right) - \ln d$$

$$\Rightarrow V = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\ln\left((L^2+d^2)^{1/2} + L\right) - \ln d\right]$$

مثال: توزیع بار سطحی



پتانسیل ناشی از یک قرص دارای بار دار با چگالی بار سطحی یکنواخت σ و شعاع R را در نقطه P روی محور آن و به فاصله z از مرکز قرص به دست آورید.



$$dq = \sigma\, ds = \sigma\, r' dr' d\theta$$

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^R\int_0^{2\pi}\frac{\sigma r' dr' d\theta}{(z^2+r'^2)^{1/2}} = \frac{2\pi\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^R\frac{r' dr'}{(r'^2+z^2)^{1/2}}$$

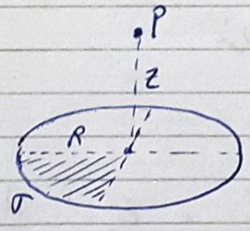
روش حل انتگرال: تغییر متغیر

$$\begin{cases} r'^2+z^2=u^2 \\ 2r'dr' = 2u\,du \end{cases}$$

$$\rightarrow \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int\frac{u\,du}{u} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int du = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}u = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(z^2+r'^2)^{1/2}\Big|_0^R$$

$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[(z^2+R^2)^{1/2} - z\right]$$

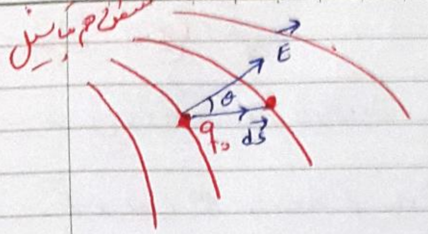
تمرین:



پتانسیل ناشی از یک چهارم قرص با چگالی بار σ و شعاع R را در نقطه P به دست آورید.

(فقط قسمت هاشور خورده از قرص، باردار است)

محاسبه میدان با استفاده از پتانسیل



کار میدان در جابجایی بار آزمون q_0 از یک سطح هم پتانسیل به سطح هم پتانسیل مجاور آن: $-q_0\, dV$ ①

از طرفی: $dW = \vec F \cdot \vec{ds} = q_0 \vec E \cdot \vec{ds} = q_0 E\, ds \cos\theta$ ②

$$① = ② \Rightarrow -q_0\, dV = q_0 E \cos\theta\, ds$$

$$-dV = E\cos\theta\, ds \Rightarrow E\cos\theta = -\frac{dV}{ds}$$

$E\cos\theta$ ← یعنی مؤلفه میدان E در امتداد جابجایی s ← E_s

$$\Rightarrow \boxed{E_s = -\frac{dV}{ds}}$$

که این جهت دلخواه است می‌تواند x ، y یا z یا هر جهت دیگر باشد.

مؤلفه میدان در هر جهتی = منفی آهنگ تغییر پتانسیل الکتریکی برحسب فاصله در همان جهت

$$\Rightarrow E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad , \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad , \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

(از مشتق جزئی استفاده می‌کنیم)

نکته: اگر از عملگرهای برداری استفاده کنیم:

$$\boxed{\vec E = -\vec\nabla V}$$

$\vec\nabla$ ← عملگر گرادیان

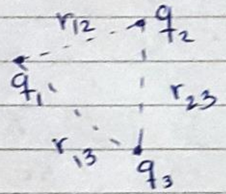
$$\vec\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\hat i + \frac{\partial}{\partial y}\hat j + \frac{\partial}{\partial z}\hat k$$

$$\rightarrow \vec E = -\frac{\partial V}{\partial x}\hat i - \frac{\partial V}{\partial y}\hat j - \frac{\partial V}{\partial z}\hat k$$

مثال: میدان حاصل از یک دوقطبی الکتریکی را بر روی محور عرض با استفاده از پتانسیل آن بدست آورید.

$$V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{z^2+R^2} - z\right)$$

انرژی پتانسیل الکتریکی سیستم از بارهای نقطه‌ای



$$V_1 = k\frac{q_1}{r}$$

$$U = W = q_2 V_1 = k\frac{q_1 q_2}{r_{12}}$$

کار لازم برای آوردن بار q_2 در نزدیکی q_1

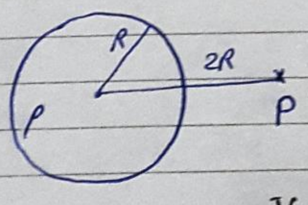
کار لازم برای قرار دادن q_3 $\rightarrow$ $U = W = q_3(V_1 + V_2)$

$$= k\frac{q_1 q_3}{r_{13}} + k\frac{q_1 q_2}{r_{23}}$$

پس انرژی پتانسیل این مجموعه ۳ تایی از ۳ جمله بالا تشکیل می‌شود.

پتانسیل جسم رسانای باردار منتشر

مثال: کره باردار با ارجمی ρ و شعاع R را در نظر بگیرید. پتانسیل نقطه P را بدست آورید.



$$V_f - V_i = -\int \vec{E}\cdot d\vec{s}$$

$$V_f = 0 \quad (\infty)$$

$$-V_p = -\int_{2R}^{\infty} \vec{E}\cdot d\vec{r}$$

میدان را به راحتی می‌توان از روش قانون گاوس محاسبه و جایگذاری کرد

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} \qquad E(4\pi r^2) = \frac{\int \rho\, dv}{\varepsilon_0} = \frac{\rho(\frac{4}{3}\pi R^3)}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{E = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}}$$

$$\rightarrow \quad -V_p = -\int_{2R}^{\infty} \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}\, \hat{r} \cdot d\vec{r} \Rightarrow V_p = \int_{2R}^{\infty} \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}\, dr$$

$$= \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0} \int \frac{dr}{r^2} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0} \left(\frac{-1}{r}\right)_{2R}^{\infty}$$

$$= \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0} \left[0 - \left(\frac{-1}{2R}\right) \right] = \boxed{\frac{\rho R^2}{6\varepsilon_0}}$$

مثال: اگر در مثال قبل نقطه P درون کره واقع باشد، پتانسیل آن را حساب کنید.

$$V_f - V_i = -\int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$$= -\int_R^{\infty} \vec{E}_1 \cdot d\vec{s} - \int_{R/2}^{R} \vec{E}_2 \cdot d\vec{s}$$

$\vec{E}_2$: میدان درون کره $\qquad$ $\vec{E}_1$: میدان بیرون کره

$$E_2 = ? \qquad \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} \qquad E(4\pi r^2) = \frac{\int \rho\, dv}{\varepsilon_0}$$

$$\int \rho\, dv = \rho \int dv = \rho V = \rho\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{E_2 = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}}$$

$$0 - V_p = -\int_{R/2}^{R} \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\, dr - \int_R^{\infty} \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}\, dr$$

$$V_p = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\frac{r^2}{2}\right)_{R/2}^{R} + \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\left(\frac{-1}{R}\right)_R^{\infty} \dashrightarrow$$

محاسبه کنید