NO: .... DATE: ....

فصل چهارم : « پتانسیل الکتریکی »

انرژی پتانسیل الکتریکی :

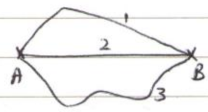
نیرو   انرژی پتانسیل

فنر $F = kx \rightarrow U = \frac{1}{2} k x^2$

گرانشی $F = mg \rightarrow U = mgh$

می دانیم انرژی پتانسیل فقط برای نیروهای پایستار تعریف می شود مانند: وزن، کشش فنر...

تعریف نیروی پایستار: نیرویی که کار آن به مسیر بستگی نداشته باشد.



$W_1 = W_2 = W_3$

نیروی الکتریکی (کولنی) نیز یک نیروی پایستار است.

پس می توان برای آن، انرژی پتانسیل تعریف کرد.

تعریف انرژی پتانسیل الکتریکی :

انرژی پتانسیل هر مجموعه ای از بارهای الکتریکی عبارت است از مقدار کاری که لازم است انجام شود تا این بارها از بینهایت در کنار هم گردآوری شوند.

* وقتی بارها در فاصله ∞ از هم قرار دارند، انرژی پتانسیل صفر است.

$W = \Delta U = U_2 - U_1 \qquad U_\infty = 0 \rightarrow U = W_\infty$

* اگر پیکربندی یک سیستم توزیع بار تغییر کند، انرژی پتانسیل آن نیز تغییر می کند.

$\Delta U = -W$ کار نیروی الکتریکی (میدان)

$\Delta U = W$ کار عامل خارجی

پتانسیل الکتریکی:

پتانسیل الکتریکی به تنهایی مفهوم ندارد و آنچه که مفهوم دارد اختلاف پتانسیل الکتریکی است که عبارت است از:

مقدار کاری که باید انجام دهیم تا یک بار آزمون را از نقطهٔ A به نقطهٔ B بیاوریم تقسیم بر مقدار بار مورد نظر:

$$\Delta V = V_A - V_B = \frac{W}{q_0}$$

این جابجایی به مسیر بستگی ندارد چون نیروی الکتریکی پایستار است. و فقط به نقاط ابتدایی و انتهایی وابسته است.

واحد اندازه‌گیری: $J/C = Volt$

★ پتانسیل الکتریکی در یک نقطه اطراف توزیع بار:

کاری که انجام می‌شود تا بار آزمون از ∞ به آن نقطه جابجا شود، (با سرعت ثابت) تقسیم بر اندازه بار آزمون،

$$V(r=\infty) = 0$$

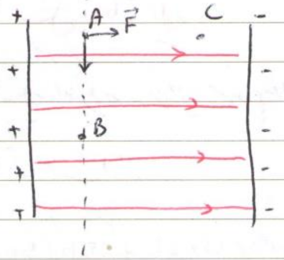
$$V(r) = \frac{W_\infty}{q_0} = \frac{\Delta U}{q_0}$$

W_∞: کار عامل خارجی

$W_{ext} = -W_E$ (کار عامل خارجی برابر است با منفی کار نیروی الکتریکی)

سطوح هم پتانسیل:

سطوح فرضی که اختلاف پتانسیل در تمام نقاط روی سطح صفر باشد یا همهٔ نقاط روی سطح دارای پتانسیل یکسانی باشند. در این صورت برای جابجایی بار q_0 روی سطح، هیچ کاری انجام نمی‌شود.

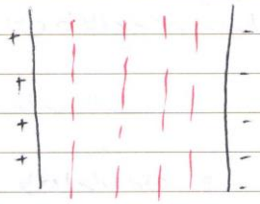


اگر بار آزمون q را از نقطه A به B ببریم مقدار کار انجام شده توسط میدان چقدر است؟

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} = 0$$

$$\rightarrow V_A = V_B$$

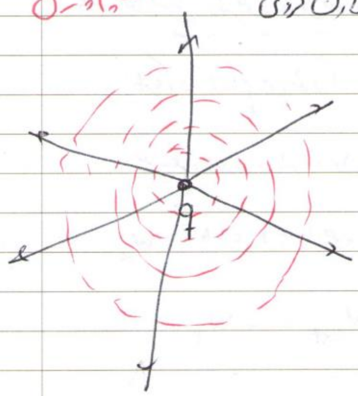
اما اگر بار q را از نقطه A به C جابجا کنیم چطور؟



نکته: میدان الکتریکی همواره بر سطوح هم پتانسیل عمود است.

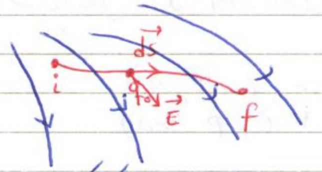
سطوح هم پتانسیل

سطح های هم پتانسیل اطراف یک بار نقطه‌ای یا توزیع بار با تقارن کروی به صورت مجموعه‌ای از کره های هم مرکز هستند.



محاسبهٔ پتانسیل با استفاده از میدان:

فرض کنید میدان الکتریکی $\vec{E}$ معلوم باشد و با خطوط میدان به صورت زیر نمایش داده شده باشد:



می‌خواهیم اختلاف پتانسیل بین دو نقطهٔ i و f را محاسبه کنیم.

برای محاسبهٔ اختلاف پتانسیل $V_f - V_i$ کافی است کار میدان الکتریکی را در جابجایی بار آزمون q_0 از نقطهٔ i به نقطهٔ f به دست آوریم:

$$W = \int dW = \int \vec{F} \cdot \vec{ds} \qquad \vec{F} = q_0 \vec{E}$$

$$= \int_i^f q_0 \vec{E} \cdot \vec{ds}$$

$$= q_0 \int_i^f \vec{E} \cdot \vec{ds}$$

$\vec{ds}$: بردار المان جابجایی در طول مسیر

از آنجا که دیدیم $\Delta V = V_f - V_i = -\frac{W}{q}$ خواهیم داشت:

$$\boxed{V_f - V_i = -\int_i^f \vec{E} \cdot \vec{ds}}$$

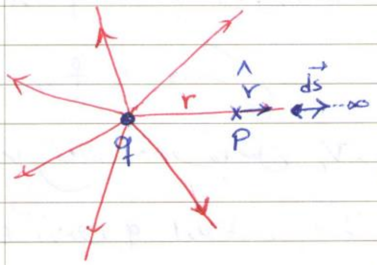
با توجه به پایستار بودن نیروی کولنی، مسیر انتخاب شده اهمیتی ندارد و همهٔ مسیرها به نتیجهٔ یکسان منجر می‌شود.

* اگر پتانسیل در یکی از نقاط مثلاً i صفر باشد یعنی $V_i = 0$ (این نقطه را مرجع پتانسیل می‌گیریم) در نتیجه:

$$\boxed{V_f = -\int_\infty^f \vec{E} \cdot \vec{ds}}$$

← پتانسیل ناشی از یک بار نقطه‌ای

(هدف: محاسبهٔ پتانسیل در نقطه‌ای به فاصله r از یک بار نقطه‌ای q)



$V_f = 0$ (در ∞)

$V_i = V$ (در نقطه P)

$$V_f - V_i = -\int_i^f \vec{E} \cdot \vec{ds} \qquad \vec{E} = \frac{kq}{r^2}\hat{r}$$

$$0 - V = -\int_r^\infty \frac{kq}{r^2}\hat{r} \cdot \vec{ds}$$

$$\hat{r} \cdot \vec{ds} = ds \cos\theta = +ds$$

$$\Rightarrow -V = -\int_r^\infty \frac{kq}{r^2} ds$$

$\vec{ds}$ در راستای $\vec{dr}$ است پس می‌توان نوشت: $\vec{ds} = \vec{dr}$

$$\to V = \int_r^\infty \frac{kq}{r^2} dr = kq \int_r^\infty \frac{dr}{r^2} = kq \left(\frac{-1}{r}\right)_r^\infty = \frac{kq}{r}$$

$$\boxed{V = \frac{kq}{r}}$$ → پتانسیل ناشی از هر بار نقطه‌ای در فاصله r از آن

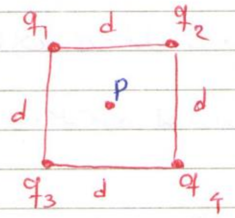
اگر $q > 0$ ← پتانسیل نقاط اطراف آن مثبت است.

اگر $q < 0$ ← " " " " منفی است.

پتانسیل ناشی از گروه بارهای نقطه‌ای (توزیع بار گسسته)

طبق اصل برهم نهی:
$$V=\sum_{i=1}^{n} V_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{kq_i}{r_i}$$

این یک جمع اسکالر یا عددی است (جمع جبری) و علامت بارها باید در نظر گرفته شود.

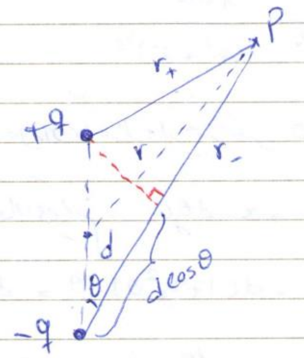


مثال: پتانسیل را در نقطهٔ P (مرکز مربع) محاسبه کنید.

$q_1 = 12\ nC$ $\quad q_3 = 31\ nC$

$q_2 = -24\ nC$ $\quad q_4 = 17\ nC$

پتانسیل ناشی از دوقطبی الکتریکی.



$$V = V_+ + V_- = k\left(\frac{q}{r_+} + \frac{-q}{r_-}\right)$$
$$= kq\left(\frac{r_- - r_+}{r_+ r_-}\right)$$

تقریب فواصل دور ($r \gg d$):

$$\begin{cases} r_- - r_+ \simeq d\cos\theta \\ r_+ r_- \approx r^2 \end{cases} \rightarrow V \simeq kq\left(\frac{d\cos\theta}{r^2}\right)$$
$$\boxed{= k\frac{p\cos\theta}{r^2}}$$

($p = qd$ گشتاور دوقطبی الکتریکی)

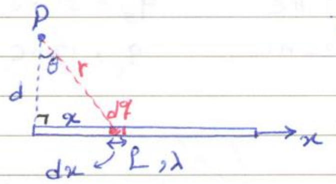
پتانسیل ناشی از توزیع بار پیوسته

$$V = \int dV = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r} = \boxed{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq}{r}}$$

r : فاصله بین المان dq و نقطه‌ای که می‌خواهیم پتانسیل را محاسبه کنیم.

مثال: توزیع بار خطی

میله نارسانای نازکی به طول L و با چگالی بار یکنواخت λ داریم. پتانسیل ناشی از آن را در نقطه P به فاصله عمودی d از انتهای میله به دست آورید.



حل:

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\, dx}{(x^2+d^2)^{1/2}}$$

$$\int dV = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^L \frac{dx}{(x^2+d^2)^{1/2}}$$

برای حل این انتگرال از تغییر متغیر $tg\theta$ استفاده می‌کنیم:

$$tg\theta = \frac{x}{d} \rightarrow x = d\,tg\theta$$

$$\Rightarrow dx = d(1+tg^2\theta)\,d\theta = d\sec^2\theta\, d\theta$$

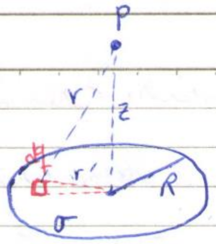
$$\int \frac{d\sec^2\theta\, d\theta}{(d^2 tg^2\theta + d^2)^{1/2}} = \int \frac{d\sec^2\theta\, d\theta}{d\sec\theta} = \int \sec\theta\, d\theta = \ln|\sec\theta + tg\theta|$$

$$= \ln\left|\frac{r}{d}+\frac{x}{d}\right|_0^L = \ln\left|\frac{r+x}{d}\right|_0^L = \ln(r+x) - \ln d\,\Big|_0^L$$

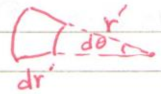
$$= \ln\left((L^2+d^2)^{1/2}+L\right) - \ln d$$

$$\Rightarrow V = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\ln\left((L^2+d^2)^{1/2}+L\right) - \ln d\right]$$

مثال : توزیع بار سطحی



پتانسیل ناشی از یک قرص دایروی باردار با چگالی بار سطحی یکنواخت σ و شعاع R را در نقطه P روی محور آن و به فاصله z از مرکز قرص به دست آورید.



$$dq = \sigma\, ds = \sigma\, r'dr'd\theta$$

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^R\int_0^{2\pi}\frac{\sigma r'dr'd\theta}{(z^2+r'^2)^{1/2}} = \frac{2\pi\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^R\frac{r'dr'}{(r'^2+z^2)^{1/2}}$$

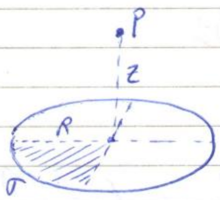
روش حل انتگرال : تغییر متغیر

$$\begin{cases} r'^2+z^2 = u^2 \\ 2r'dr' = 2u\,du \end{cases}$$

$$\rightarrow \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int\frac{u\,du}{u} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int du = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}u = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(z^2+r'^2)^{1/2}\Big|_0^R$$

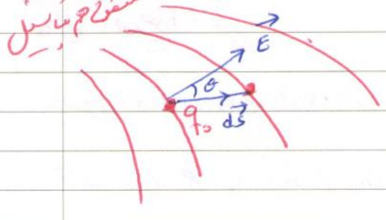
$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[(z^2+R^2)^{1/2} - z\right]$$

تمرین :



پتانسیل ناشی از یک چهارم قرص با چگالی بار σ و شعاع R را در نقطه P به دست آورید.

(فقط قسمت هاشور خورده از قرص ، باردار است)



محاسبه میدان با استفاده از پتانسیل

کار میدان در جابجایی بار آزمون q_0 از یک سطح هم‌پتانسیل به سطح هم‌پتانسیل مجاور آن : ① $-q_0\, dV$

از طرفی : $dW = \vec F \cdot d\vec s = q_0 \vec E \cdot d\vec s = q_0 E\, ds \cos\theta$ ②

$$① = ② \Rightarrow -q_0\, dV = q_0 E \cos\theta\, ds$$

$$-dV = E\cos\theta\, ds \Rightarrow E\cos\theta = -\frac{dV}{ds}$$

$E\cos\theta$ ← یعنی مؤلفه میدان E در امتداد جابجایی s ← E_s

$$\Rightarrow \boxed{E_s = -\frac{dV}{ds}}$$

که یک جهت دلخواه است می‌تواند x، y یا z یا هر جهت دیگر باشد.

مؤلفه میدان در هر جهت = منفی آهنگ تغییر پتانسیل الکتریکی برحسب فاصله در همان جهت

$$\Rightarrow E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad , \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad , \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

(از مشتق جزئی استفاده می‌کنیم)

نکته: اگر از عملگرهای برداری استفاده کنیم:

$$\boxed{\vec E = -\vec\nabla V}$$

عملگر گرادیان

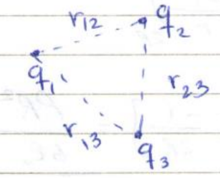
$$\vec\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\hat i + \frac{\partial}{\partial y}\hat j + \frac{\partial}{\partial z}\hat k$$

$$\rightarrow \vec E = -\frac{\partial V}{\partial x}\hat i - \frac{\partial V}{\partial y}\hat j - \frac{\partial V}{\partial z}\hat k$$

مثال: میدان حاصل از یک دوقطبی الکتریکی را بر روی محور فرض با استفاده از پتانسیل آن بدست آورید.

$$V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{z^2+R^2} - z\right)$$

انرژی پتانسیل الکتریکی سیستم ذرات نقطه‌ای



$$V_1 = k\frac{q_1}{r}$$

$$U = W = q_2 V_1 = k\frac{q_1 q_2}{r_{12}}$$ کار لازم برای قرار دادن بار q_2 در نزدیکی q_1

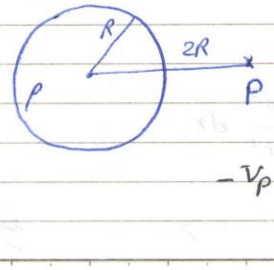
کار لازم برای قرار دادن q_3 $\rightarrow$ $U = W = q_3(V_1 + V_2)$

$$= k\frac{q_1 q_3}{r_{13}} + k\frac{q_1 q_2}{r_{23}}$$

پس انرژی پتانسیل این مجموعه ۳ تایی از ۳ جمله بالا تشکیل می‌شود.

پتانسیل جسم رسانای باردار متقارن

مثال: کره باردار با بار حجمی ρ و شعاع R را در نظر بگیرید. پتانسیل نقطه P را بدست آورید.



$$V_f - V_i = -\int \vec{E}\cdot d\vec{s}$$

$$V_f = 0 \quad (\infty)$$

$$-V_p = -\int_{2R}^{\infty} \vec{E}\cdot d\vec{r}$$ میدان را به راحتی می‌توان از روش قانون گاوس محاسبه و جایگذاری کرد

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} \qquad E(4\pi r^2) = \frac{\int \rho\, dv}{\varepsilon_0} = \frac{\rho(\frac{4}{3}\pi R^3)}{\varepsilon_0}$$

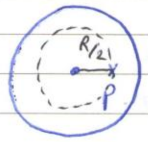
$$\boxed{E = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}}$$

$$\rightarrow \; -V_p = -\int_{2R}^{\infty} \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}\, \hat{r}\cdot d\vec{r} \Rightarrow V_p = \int_{2R}^{\infty} \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}\, dr$$

$$= \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0} \int \frac{dr}{r^2} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\left(\frac{-1}{r}\right)_{2R}^{\infty}$$

$$= \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\left[0 - \left(\frac{-1}{2R}\right)\right] = \boxed{\frac{\rho R^2}{6\varepsilon_0}}$$

مثال: اگر در مثال قبل نقطه P درون کره واقع باشد، پتانسیل آن را حساب کنید.



$$V_f - V_i = -\int_i^f \vec{E}\cdot d\vec{s}$$

$$= -\int_{\infty}^{R} \vec{E}_1\cdot d\vec{s} - \int_{R}^{R/2} \vec{E}_2\cdot d\vec{s}$$

$\vec{E}_2$: میدان درون کره $\qquad$ $\vec{E}_1$: میدان بیرون کره

$$E_2 = ? \qquad \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} \qquad E(4\pi r^2) = \frac{\int \rho\, dv}{\varepsilon_0}$$

$$\int \rho\, dv = \rho \int dv = \rho V = \rho\left(\tfrac{4}{3}\pi r^3\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{E_2 = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}}$$

$$0 - V_p = -\int_{R/2}^{R} \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\, dr - \int_{R}^{\infty} \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}\, dr$$

$$V_p = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\frac{r^2}{2}\right)_{R/2}^{R} + \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\left(\frac{-1}{R}\right)_{R}^{\infty} \dashrightarrow$$ حساب کنید

نکته: قبلاً دیدیم برای هر رسانای منزوی: $\vec{E}_{\text{داخل رسانا}} = 0$

و با استفاده از قانون گاوس ثابت کردیم تمام بارهای اضافی فقط بر روی سطح رسانا توزیع می‌شود. (اما درباره چگونگی توزیع بار توضیحی ندادیم)

در اینجا ثابت می‌کنیم: بارهای اضافی روی هر رسانای منزوی چنان در سطح آن توزیع می‌شود که تمامی نقاط آن (چه در سطح و چه داخل جسم) به پتانسیل یکسان برسند.

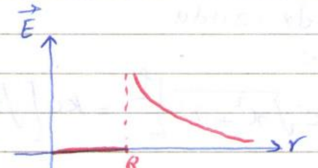
* حتی برای جسم رسانای دارای حفره درونی اگرچه حفره درونی دارای بار خالص باشد

اثبات:

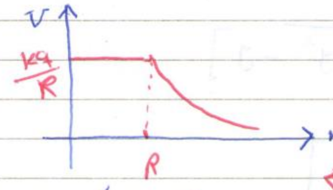
$$V_f - V_i = -\int_i^f \vec{E}\cdot d\vec{s}$$

برای نقاط درون رسانا: $\vec{E} = 0 \Rightarrow V_f = V_i$

برای یک پوسته رسانا به بار q و شعاع R:



← میدان در داخل پوسته صفر است و در خارج آن با رابطه $\frac{kq}{r^2}$ کاهش می‌یابد.



← پتانسیل الکتریکی در داخل و روی سطح پوسته ثابت است و در خارج آن با رابطه $\frac{kq}{r}$ کاهش می‌یابد.

نکته: اگر یک رسانای منزوی در یک میدان الکتریکی خارجی قرار بگیرد، الکترون‌های آزاد آن به گونه‌ای آرایش پیدا می‌کنند که:

۱- میدان درون رسانا صفر باشد

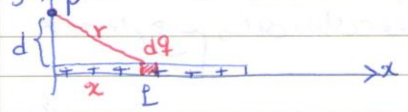
۲- میدان بر سطح رسانا عمود باشد.

مثال: میله پلاستیکی نازکی به طول L و چگالی بار خطی غیریکنواخت $\lambda = Cx$ داریم که C یک عدد ثابت است.

الف) با فرض $V_\infty = 0$ ، پتانسیل الکتریکی را در نقطهٔ P روی محور y به دست آورید.

ب) مؤلفهٔ میدان الکتریکی E_y را در نقطهٔ P معین کنید.

ج) چرا با استفاده از نتیجهٔ قسمت (الف) نمی‌توان مؤلفهٔ میدان E_x را در نقطهٔ P به دست آورد؟



حل:

$$V = \int dV = \int \frac{k\,dq}{r} = \int \frac{k\lambda\,dx}{r} = \int_0^L \frac{kCx\,dx}{\sqrt{d^2+x^2}}$$

$$= kC\int_0^L \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+d^2}} \longrightarrow \text{تغییر متغیر} \begin{cases} x^2+d^2 = u^2 \\ 2x\,dx = 2u\,du \end{cases}$$

$$\rightarrow V = kC\int \frac{u\,du}{u} = kCu = kC\sqrt{x^2+d^2}\Big|_0^L = kC\left[\sqrt{L^2+d^2} - d\right]$$

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \qquad V = kC\left[\sqrt{L^2+y^2} - y\right]$$

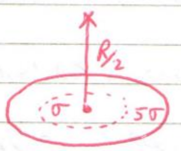
$$= -kC\left[\frac{1}{2}(L^2+y^2)^{-1/2}(2y) - 1\right]$$

$$= -kC\left[\frac{y}{\sqrt{L^2+y^2}} - 1\right]$$

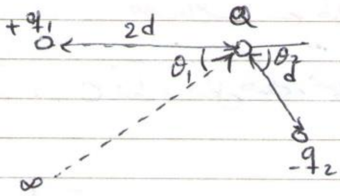
NO: DATE:

تمرین: یک قرص به شعاع R، چگالی بار سطحی آن از $r=0$ تا $r=\frac{R}{2}$ برابر با σ و از $r=\frac{R}{2}$ تا $r=R$ برابر 5σ است. الف) بار کل روی قرص را محاسبه کنید.

ب) پتانسیل ناشی از قرص را در نقطه ای روی محور آن و به فاصله $z=\frac{R}{2}$ از مرکز قرص به دست آورید.

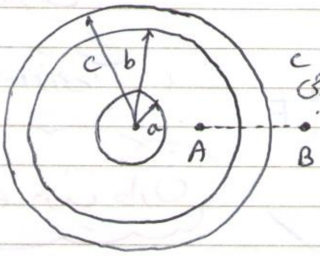


تمرین: در شکل مقابل چقدر باید کار انجام دهیم تا ذره ای به بار $Q=16e$ را که در آغاز در حال سکون است، در امتداد خطی از بینهایت به مجاورت ذرات ثابت (ساکن) $q_1=4e$ و $q_2=\frac{q_1}{2}$ بیاوریم؟ فرض کنید $d=4\,cm$ و $\theta_1=43^\circ$ و $\theta_2=60^\circ$.



تمرین: یک کره رسانا به شعاع a و بار Q توسط پوسته کروی نارسانا به شعاع داخلی b و شعاع خارجی c و چگالی بار حجمی ρ احاطه شده است.

اختلاف پتانسیل بین نقاط A و B را به دست آورید.



$$\begin{cases} r_A = 2a \\ r_B = 6a \end{cases} \qquad \begin{cases} b = 3a \\ c = 4a \end{cases}$$