NO: DATE:

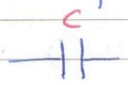
# فصل پنجم : « ظرفیت »

خازن : قطعه ای که می توان در آن انرژی الکتریکی را ذخیره کرد.

ظرفیت : حداکثر مقدار انرژی قابل ذخیره در خازن را نشان می دهد. (C)

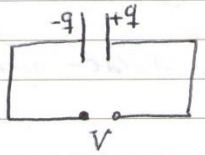
ساختار خازن : دو رسانای مفروض با هر شکل دلخواه

خازن تخت : دو صفحه رسانای موازی به مساحت A که به فاصله d از هم قرار گرفته باشند.




نماد خازن

نکته : بار خالص خازن همواره صفر است.




$q \propto V \Rightarrow q = CV$ (رابطه تجربی)

ضریب ثابت ← ظرفیت خازن

نکته : C فقط به شکل هندسی صفحات رسانا بستگی دارد (ساختار هندسی خازن) نه به q و V.

یکای ظرفیت : $F = \frac{C}{V}$ فاراد

(فاراد واحد بزرگی است)

$\mu F = 10^{-6} F$ , $pF = 10^{-12} F$

## محاسبه ظرفیت خازن

۱- بار روی صفحات را q فرض می‌کنیم.

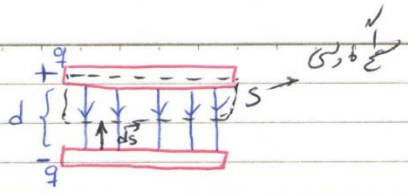
۲- میدان E بین صفحه‌ها را برحسب q محاسبه می‌کنیم.

۳- اختلاف پتانسیل بین دو صفحه (V) را با استفاده از $\Delta V = -\int E \cdot ds$ به دست می‌آوریم.

۴- محاسبه ظرفیت با استفاده از $C = \frac{q}{V}$

LOTUS paper

## مثال: خازن تخت




① محاسبه میدان با استفاده از قانون گاوس:

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow EA = \frac{q}{\varepsilon_0} \rightarrow E = \frac{q}{\varepsilon_0 A}$$

سطح گاوسی را طوری انتخاب می‌کنیم که:
$\vec{E}$ روی سطح ثابت باشد
$\vec{E}$ و $d\vec{A}$ موازی باشند

② محاسبه $V$

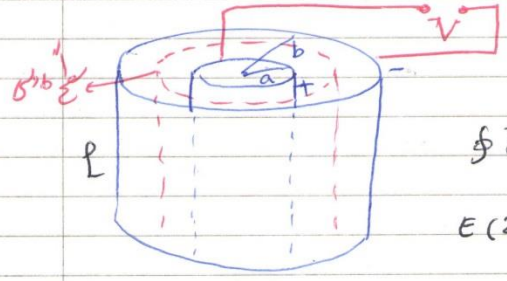
$$V_f - V_i = -\int_i^f \vec{E}\cdot d\vec{s}$$

$$= -\int^{+} (-E\,ds) = \int^{+} E\,ds = E\int^{+} ds = Ed$$

(در خلاف جهت میدان حرکت می‌کنیم)

$$\Rightarrow V = \frac{q}{\varepsilon_0 A} d \quad \Rightarrow \quad C = \frac{q}{V} = \frac{q}{\frac{qd}{\varepsilon_0 A}} = \boxed{\varepsilon_0 \frac{A}{d}}$$

## مثال: خازن استوانه‌ای




$(l \gg b)$

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$E(2\pi r l) = \frac{q}{\varepsilon_0} \rightarrow E = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 r l}$$

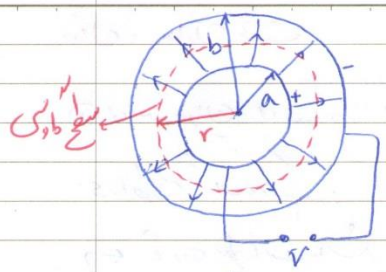
$$V = \int^{+} E\,ds = \frac{-q}{2\pi\varepsilon_0 l}\int_b^a \frac{dr}{r} = \frac{-q}{2\pi\varepsilon_0 l}(\ln a - \ln b)$$

$(ds = -dr)$

$$= \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\boxed{C = \frac{q}{V} = 2\pi\varepsilon_0 \frac{l}{\ln(b/a)}}$$

مثال: خازن کروی




$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$$

$$E(4\pi r^2) = \frac{q}{\varepsilon_0} \rightarrow E = \frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}$$

$$V_f - V_i = -\int \vec{E}\cdot d\vec{s}$$

$$V = \int_b^a E\,ds = \int_b^a \frac{-q}{4\pi\varepsilon r^2}\,dr = \frac{-q}{4\pi\varepsilon}\int_b^a \frac{dr}{r^2} = \frac{-q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{-1}{r}\right)\Big|_b^a$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

$$C = \frac{q}{V} = 4\pi\varepsilon\left(\frac{ab}{b-a}\right)$$

* کرهٔ منزوی

اگر $b \to \infty$ و $a \to R$ یعنی فقط یک کرهٔ بار دار منزوی داشته باشیم دارای ظرفیت زیر است:

$$C = 4\pi\varepsilon\,\frac{a}{1-\frac{a}{b}} \simeq 4\pi\varepsilon R$$

به هم بستن خازنها:

وقتی مجموعه‌ای از خازنها در یک مدار به هم متصل شده باشند می‌توان این مجموعه را با خازنی به نام خازن معادل جایگزین کرد.

الف) به هم بستن موازی: یعنی یک گروه از صفحه‌ها به هم متصل و گروه دیگر از صفحه‌ها نیز مستقیماً به هم متصل شده باشند. بنابراین اختلاف پتانسیل دو سر همهٔ آنها یکی (V) است.

خازن معادل $C_{eq} = ?$

$q_1 = C_1 V$ ، $q_2 = C_2 V$ ، $q_3 = C_3 V$

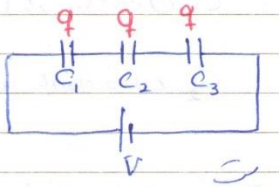
$$q = q_1 + q_2 + q_3 = C_1 V + C_2 V + C_3 V = V(C_1 + C_2 + C_3)$$

$$C_{eq} = \frac{q}{V} = C_1 + C_2 + C_3$$

برای $n$ خازن موازی در حالت کلی $\rightarrow$ $\boxed{C_{eq} = \sum_{i=1}^{n} C_i}$

ب) متوالی (سری)

یعنی خازن‌ها لطور پیاپی و نُبت سرهم متصل شده باشند.




در این حالت بار ذخیره شده روی همهٔ خازن‌ها باهم برابر است؛ زیرا به طریق القا بارداری شوند.

بنابراین اختلاف پتانسیل دوسر هرخازن با ظرفیت متفاوت!

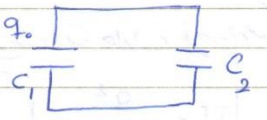
$$V_1 = \frac{q}{C_1} \text{ ، } V_2 = \frac{q}{C_2} \text{ ، } V_3 = \frac{q}{C_3}$$

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right)$$

$$C_{eq} = \frac{q}{V} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right)^{-1}$$

برای $n$ خازن متوالی: در حالت کلی: $\boxed{\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}}$

مثال: ابتدا خازن $C_1$ را توسط باتری $V_0$ باردار کرده، وسپس از باتری جدا و به خازن بدون بار $C_2$ متصل می‌کنیم. بارهای روی هرخازن را محاسبه کنید.



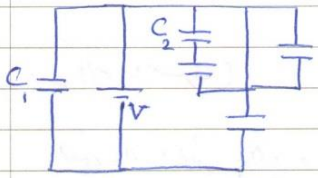

$$\begin{cases} V_0 = 6.3\,V \\ C_1 = 3.55\,\mu F \\ C_2 = 8.95\,\mu F \end{cases}$$

حل: $V_1 = V_2 \qquad q_0 = C_1 V_0$

دو معادله دو مجهول را حل می‌کنیم.

$$\frac{q_1}{C_1} = \frac{q_2}{C_2} \quad (1) \qquad\qquad q_1 + q_2 = q_0 \quad (2)$$

مثال:




در شکل مقابل $V = 10V$ است و ظرفیت همهٔ خازن‌ها برابر $10\mu F$ است. مطلوب است:

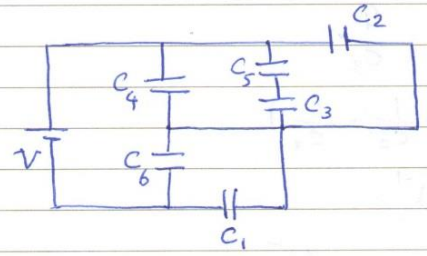
الف) بار روی خازن $C_1$:

$$V_1 = \frac{q_1}{C_1} \rightarrow q_1 = V_1 C_1 = V C_1 = 10 \times 10 = 100\mu F$$

ب) بار روی خازن $C_2$:

$$q_2 = V_2 C_2 \quad V_2 = 0 \Rightarrow q_2 = 0$$

مثال: ظرفیت معادل مجموعه زیر و بار ذخیره شده روی خازن‌های $C_1$، $C_2$ و $C_3$ را به‌دست آورید.




$C_1 = C_6 = 3\mu F$

$C_3 = C_5 = 2C_2 = 2C_4 = 4\mu F$

$V = 20V$

(حل بعهدهٔ دانشجو)

## انرژی ذخیره شده در میدان الکتریکی

کار نیروی خارجی برای باردار کردن خازن به صورت انرژی پتانسیل الکتریکی $U$ در میدان الکتریکی بین صفحات خازن ذخیره می‌شود.

$$dW = V\,dq = \frac{q}{C}\,dq$$

$$W = \int dW = \frac{1}{C}\int q\,dq = \frac{1}{C}\,\frac{q^2}{2} \rightarrow \boxed{U = \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2}CV^2}$$

NO: DATE:

**چگالی انرژی :** انرژی ذخیره شده در واحد حجم $u = \frac{U}{V_{\text{حجم}}}$

$$u = \frac{\frac{1}{2}CV^2}{Ad} = \frac{\varepsilon_0 \frac{A}{d} V^2}{2Ad} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left(\frac{V}{d}\right)^2 = \frac{1}{2}\varepsilon E^2$$

برای خازن تخت $V_{\text{حجم}} = Ad$ ؛

$u = \frac{1}{2}\varepsilon E^2$ : فقط به شدت میدان بستگی دارد.

این رابطه در حالت کلی برقرار است.

**خازن حاوی دی الکتریک :**

دی الکتریک ها موادی هستند که دارای الکترون آزاد نیستند. فاراده دریافت که وقتی فضای بین صفحات خازن با یک ماده دی الکتریک پر شود، ظرفیت آن با یک ضریب $K$ (ثابت دی الکتریک) افزایش می یابد.

اثرات دیگر دی الکتریک : ← اختلاف پتانسیل قابل اعمال به صفحات خازن بی تناسب از مقدار مشخصی ($V_{max}$ : پتانسیل شکست) بیشتر نمی شود. با انتخاب ماده دی الکتریک می توان این پتانسیل را افزایش داد. (استقامت دی الکتریکی : حداکثر میدان الکتریکی قابل تحمل توسط دی الکتریک قبل از رسیدن به شکست الکتریکی)

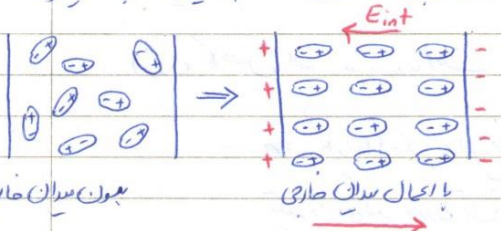
★ اثر دیگر دی الکتریک : حل مسائل مکانیکی نزدیک کردن صفحات خازن به یکدیگر.

$$C = K C_0$$ ← بدون دی الکتریک

**دی الکتریک ها از دیدگاه اتمی :**

دی الکتریک ها در دو دسته تقسیم بندی می شوند { قطبی : مانند آب (دارای دوقطبی های دائمی) ؛ ناقطبی }

با قرار گرفتن دی الکتریک قطبی در میدان خارجی ، دوقطبی های آن در جهت میدان خارجی تمایل می کنند و این باعث ایجاد یک میدان داخلی در خلاف جهت میدان خارجی خواهد شد.



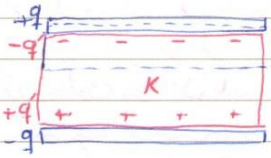

بنابراین دی الکتریک ، میدان خازن را تضعیف می کند.

LOTUS paper

**دی الکتریک‌های ناقطبی:** در حضور میدان خارجی ابتدا از طریق القا دارای گشتاور دوقطبی می‌شوند یعنی

حرکت بار مثبت و منفی از هم جدا می‌شوند ← در ادامه مانند دی الکتریک‌های قطبی عمل می‌کنند.

## اصلاح قانون گاوس با حضور دی الکتریک




بدون دی الکتریک $\rightarrow \oint \vec{E}.\vec{dA} = \frac{q}{\varepsilon} \Rightarrow E = \frac{q}{\varepsilon_0 A}$

با دی الکتریک $\Rightarrow \oint \vec{E}.\vec{dA} = \frac{q-q'}{\varepsilon_0} \rightarrow E = \frac{q-q'}{\varepsilon_0 A}$ ①

از طرفی : $E = \frac{E_0}{k} = \frac{q}{\varepsilon A k}$ ②

① = ② $\Rightarrow \frac{q-q'}{\varepsilon_0 A} = \frac{q}{\varepsilon A k} \Rightarrow \boxed{q - q' = \frac{q}{k}}$

جایگذاری در قانون گاوس $\rightarrow \oint \vec{E}.\vec{dA} = \frac{q}{k\varepsilon_0}$ یا $\boxed{\int k\vec{E}.\vec{dA} = \frac{q}{\varepsilon_0}}$

بردارهای دی الکتریکی $\varepsilon_0 k \vec{E} = \vec{D}$

$\hookrightarrow \boxed{\oint \vec{D}.\vec{dA} = q}$

**مثال:** یک خازن صفحه تخت را به ظرفیت C، به یک باتری با اختلاف پتانسیل V باردار کرده‌ایم.

سپس باتری را از خازن جدا می‌کنیم و یک تیغه جنسی را بین صفحات قرار می‌دهیم. انرژی پتانسیل

این خازن قبل و بعد از قرار دادن تیغه در خازن چقدر است؟

$U_1 = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$

$U_2 = \frac{1}{2} \frac{q^2}{kC} = \frac{U_1}{k} \rightarrow$ $U_2$ به اندازه k برابر کاهش می‌یابد

(q ثابت می‌ماند ولی V تغییر می‌کند) انرژی کاهش یافته چه شده است؟

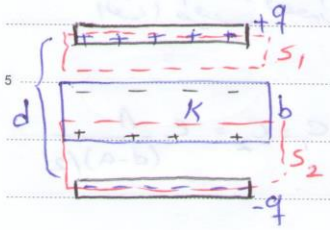
صرف کار انجام شده برای قرار دادن تیغه در خازن، زیرا خازن نیروی بر تیغه وارد می‌کند و روی آن کار انجام می‌دهد.

Subject:

Year. Month. Date. ( )

مثال: خازن تخت با مساحت صفحات A و فاصله بین صفحات d داریم و به اختلاف پتانسیل $V$ متصل شده است. پس از خذف باتری، تیغه‌ی دی الکتریک به ضخامت $b$ $(b<d)$ و ثابت دی الکتریک $k$ را مطابق شکل بین صفحه‌های آن قرار داده ایم.

الف) ظرفیت خازن قبل از ورود تیغه‌ی دی الکتریک؟




$$C_0 = \varepsilon_0 \frac{A}{d}$$

ب) مقدار بار آزاد روی صفحات خازن؟

$$q_0 = C_0 V_0$$

ج) میدان الکتریکی $E_0$ در فضای خالی بین صفحه‌های خازن و در داخل تیغه‌ی دی الکتریک

$$\oint_{S_1} \vec{E_0} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0} \rightarrow \oint_{S_1} E_0 \, dA = E_0 A = \frac{q_0}{\varepsilon_0} \rightarrow E_0 = \frac{q_0}{\varepsilon_0 A}$$

$$\oint_{S_2} \vec{E_1} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{k\varepsilon_0} \rightarrow \oint_{S_2} E_1 \, dA = -E_1 A = \frac{-q_0}{k\varepsilon_0} \rightarrow E_1 = \frac{q_0}{k\varepsilon_0 A}$$

د) اختلاف پتانسیل $V$ بین صفحات خازن پس از قرار دادن تیغه‌ی دی الکتریک چقدر است؟

$$V = \int_{-}^{+} E \, ds = E_0 \left(\frac{d-b}{2}\right) + E_1 b + E_0 \left(\frac{d-b}{2}\right)$$

$$= E_0 (d-b) + E_1 b = \frac{q_0}{\varepsilon_0 A}\left[(d-b) + \frac{b}{k}\right]$$

* این اختلاف پتانسیل از اختلاف پتانسیل اولیه $V_0$ کمتر است.

ه) ظرفیت جدید خازن؟

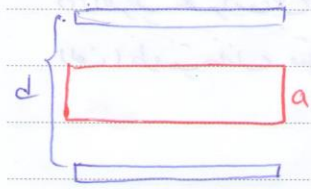
$$C = \frac{q_0}{V} = \varepsilon \frac{A}{(d-b) + b/k}$$

* این ظرفیت از ظرفیت اولیه خازن ($C_0$) بیشتر است.

Subject:

Year. Month. Date. ( )

مثال: یک خازن تخت به فاصله بین صفحات d و مساحت A داریم. یک تیغه فلزی بدون بار با ضخامت a را در وسط فاصله بین صفحات خازن قرار می‌دهیم.




الف) ظرفیت قطعه را تعیین کنید.

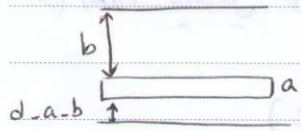
$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \qquad C_1 = C_2 = \varepsilon_0 \frac{A}{(d-a)/2}$$

$$\rightarrow \quad C_{eq} = \varepsilon_0 \frac{A}{d-a}$$

ب) نشان دهید ظرفیت خازن اولیه با قرار دادن تیغه فلزی تغییر نمی‌کند اگر ضخامت تیغه بسیار کم باشد.

$$C = \lim_{a \to 0} \frac{\varepsilon_0 A}{d-a} = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$$

ج) اگر همان تیغه فلزی تغییر کند و دقیقاً در وسط بین صفحات خازن نباشد چه اتفاقی می‌افتد؟




$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{\varepsilon_0 A/b} + \frac{1}{\varepsilon_0 A/(d-a-b)}$$

$$= \frac{b}{\varepsilon_0 A} + \frac{d-a-b}{\varepsilon_0 A} = \frac{d-a}{\varepsilon_0 A}$$

$$\rightarrow C_{eq} = \varepsilon_0 \frac{A}{d-a}$$

→ تغییری نمی‌کند و همان تیغه مهم نیست.

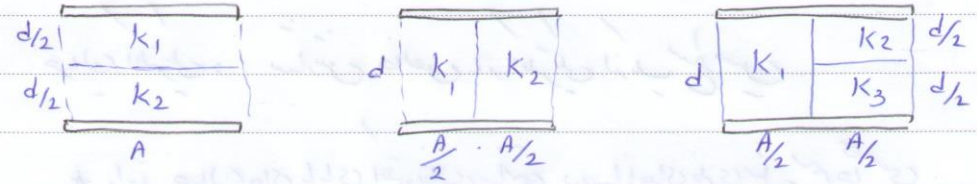
★ نکته مهم: از نتیجه این مثال برای حل مسائل دیگر می‌توان استفاده کرد و با فرض یک تیغه نازک، یک خازن را به صورت چند خازن متوالی تبدیل نمود. مانند مثال قبل:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \cdots$$

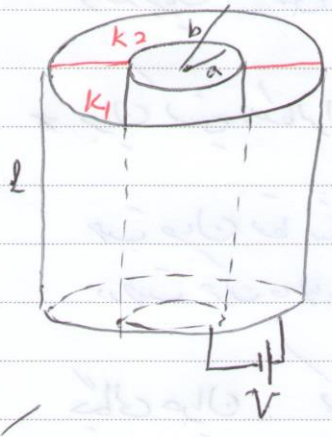
Subject:

Year. Month. Date. ( )

تمرین: ظرفیت معادل خازن‌های زیر را محاسبه کنید.




تمرین: یک خازن استوانه‌ای متشکل از دو استوانهٔ رسانا به شعاع‌های a و b داریم. فضای خازن توسط دو مادهٔ دی الکتریک به دو بخش هم‌اندازه تقسیم شده است. ظرفیت معادل چقدر است؟




تمرین: خازنی به ظرفیت مجهول C را با اختلاف پتانسیل $V_0 = 100V$ باردار می‌کنیم و آن را به دو سر خازن بدون باری به ظرفیت $C_2 = 6\mu F$ متصل می‌کنیم. اگر اختلاف پتانسیل نهایی بین دو سر خازن $6\mu F$ برابر $40V$ باشد ظرفیت C چقدر است؟