فصل سوم : قانون گاوس

تعریف : شار (flux)

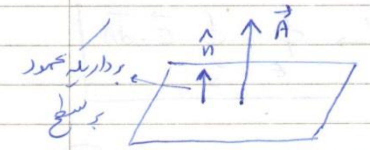
برای هر میدان برداری $\vec{A}$ می‌توان شار ϕ را که از یک سطح مشخص می‌گذرد حساب کرد.

شار میدان $\vec{E}$ که از سطح مشخص S عبور می‌کند به معنی تعداد خطوط میدانی است که از این سطح می‌گذرد و مطابق زیر به دست می‌آید:

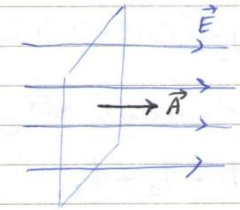
$$\phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} = EA\cos\theta \quad \left(\frac{N.m^2}{C}\right)$$

رابطه فوق در حالتی برقرار است که میدان یکنواخت و سطح تخت در نظر گرفته شوند.

در این صورت زاویه بین بردار میدان $\vec{E}$ و بردار عمود بر سطح ($\vec{A} = A\hat{n}$) θ است.

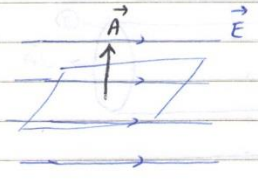


یعنی اگر $\theta = 0$ یا $\theta = \pi$ باشد بیشترین شار از این سطح می‌گذرد و اگر $\theta = \frac{\pi}{2}$ باشد شار میدانی که از سطح عبور می‌کند صفر است



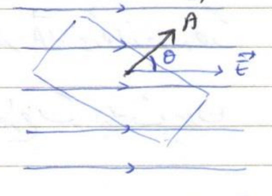
$\theta = 0$

$\phi_E = AE$



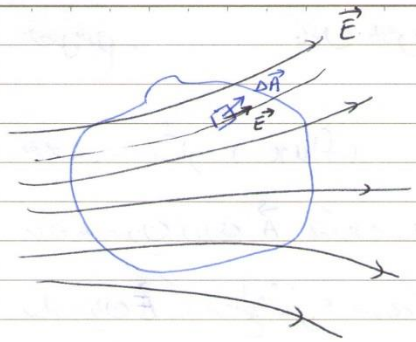
$\theta = \frac{\pi}{2}$

$\phi_E = 0$



$\phi_E = AE\cos\theta$

NO: .... DATE: ....



اگر سطح بسته‌ای با شکل دلخواه داشته باشیم،
که در میدان $\vec{E}$ واقع شده باشد،
برای محاسبه شار گذرنده از آن می‌توان
سطح را به قسمت‌های بسیار کوچکی مثل
ΔA تقسیم کرد و شار هر قسمت را محاسبه کرد.

$$\phi_i = \vec{E}_i \cdot \Delta\vec{A}_i$$

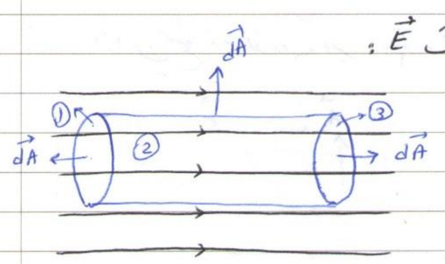
$$\hookrightarrow \phi_{\text{کل}} = \phi_1 + \phi_2 + \dots + \phi_n = \sum_{i=1}^{n} \phi_i = \sum \vec{E}_i \cdot \Delta\vec{A}_i$$

برای انجام محاسبات با دقت بیشتر تعداد N را افزایش می‌دهیم در نتیجه: $\Delta\vec{A} \to d\vec{A}$

$$\boxed{\phi_E = \int_s \vec{E} \cdot d\vec{A}} \xrightarrow[\text{باشد}]{\text{اگر s یک سطح بسته}} \boxed{\phi_E = \oint_s \vec{E} \cdot d\vec{A}}$$

s: سطح مورد نظر

مثال: شار عبوری از استوانه در میدان یکنواخت $\vec{E}$:



این استوانه از سه قسمت تشکیل شده است:
در مقطع ~~استوانه~~ دایره‌ای و یک سطح جانبی.

$$\phi_{\text{کل}} = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3$$

$$\phi_1 = \int_1 \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_1 E\,dA\cos\theta^{\,\nearrow \pi} = -\int_1 E\,dA = -E\int_1 dA = \boxed{-EA}$$

روی هر قسمت دو بردار $\vec{E}$ و $d\vec{A}$ را رسم می‌کنیم

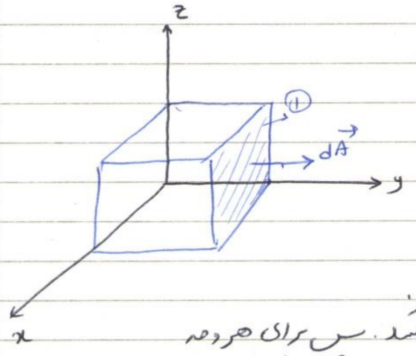
(نکته: برای سطوح باز بردار $d\vec{A}$ می‌تواند در دو جهت نشان داده شود اما برای سطوح بسته به سمت بیرون سطح در نظر گرفته می‌شود)

$$\phi_2 = \int_2 \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_2 E\, dA \cos\theta^{\nearrow \pi/2} = 0$$

$$\phi_3 = \int_3 \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_3 E\, dA \cos\theta^{\nearrow 0} = \int_3 E\, dA = E\int dA = EA$$

$$\phi_T = (-EA) + EA + 0 = 0$$

پس شار خالص الکتریکی گذرنده از این استوانه صفر است.



مثال ۲: مکعبی به ضلع ۲cm داریم که در میدان $\vec{E} = 3x\hat{i} + 4\hat{j}$ واقع شده است. شار گذرنده از آن را محاسبه کنید.

جواب: این مکعب دارای شش وجه می‌باشد. پس برای هر وجه ϕ را محاسبه کرده و تمام ϕها را با هم جمع جبری می‌نماییم.

برای مثال برای وجه سمت راست:

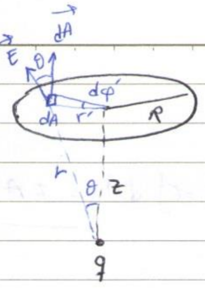
$$\phi_1 = \int \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int (3x\hat{i} + 4\hat{j}) \cdot d\vec{A}$$

$$= \int (3x\hat{i} + 4\hat{j}) \cdot (dA\,\hat{j})$$

$$= \int 3x\, dA \underbrace{(\hat{i} \cdot \hat{j})}_{0} + 4\, dA \underbrace{(\hat{j} \cdot \hat{j})}_{1}$$

$$= \int 4\, dA = 4A = 4\,(2 \times 10^{-2})^2 = 16 \times 10^{-4} \; \frac{N \cdot m^2}{C}$$

برای بقیه وجوه را شما به دست آورید.



مثال ۳: بار نقطه‌ای q به فاصله z از صفحه دایره‌ای به شعاع R قرار دارد. شار گذرنده از سطح را حساب کنید.

مساحت المان dA : $dA = r' d\varphi' dr'$ ①

$$\vec{E} = \frac{kq}{r^2}\hat{r} \rightarrow$$ میدان حاصل از بار q در محل المان dA

$$\phi_E = \int \vec{E}\cdot\vec{dA} = \int \frac{kq}{r^2}\,\hat{r}\cdot\vec{dA}$$

$$\hat{r}\cdot\vec{dA} = \underbrace{|\hat{r}|}_{1}\,|\vec{dA}|\cos\theta = dA\cos\theta \overset{①②}{=} r' d\varphi' dr' \left(\frac{z}{\sqrt{z^2+r'^2}}\right) \quad ③$$

$$\cos\theta = \frac{z}{r} = \frac{z}{(z^2+r'^2)^{1/2}} \quad ②$$

$$\xrightarrow[\text{در انتگرال}]{\text{با جایگذاری ③}} kq\int_0^R\!\!\int_0^{2\pi} \frac{r' d\phi' dr' z}{(z^2+r'^2)^2\sqrt{z^2+r'^2}} = kqz\int_0^R\!\!\int_0^{2\pi}\frac{r' d\varphi' dr'}{(z^2+r'^2)^{3/2}}$$

$$= kqz(2\pi)\underbrace{\int_0^R \frac{r' dr'}{(z^2+r'^2)^{3/2}}}_{\downarrow} = 2\pi kqz\left[\frac{1}{z} - \frac{1}{\sqrt{z^2+R^2}}\right]$$

برای حل این انتگرال از تغییر متغیر استفاده می‌شود:

$$z^2+r'^2 = u^2 \Rightarrow 2r'dr' = 2u\,du$$

$$\rightarrow \int \frac{u\,du}{(u^2)^{3/2}} = \int \frac{du}{u^2} = \frac{-1}{u} = \frac{-1}{\sqrt{z^2+r'^2}}\Bigg|_0^R = \frac{-1}{\sqrt{z^2+R^2}} + \frac{1}{z}$$

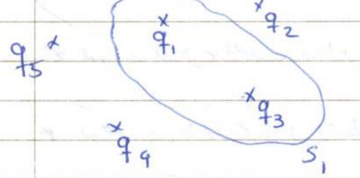
قانون گاوس : Gauss law

بنابر قانون گاوس، شار میدان الکتریکی گذرنده از هر سطح بسته متناسب است با مقدار بار خالصی که درون سطح بسته قرار دارد.

$$\boxed{\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}}$$

جمع جبری بارها (q_{in})

* اگر بار فقط بیرون سطح بسته باشد، شار گذرنده از سطح صفر است.
* مقدار شار بستگی به شکل و ابعاد سطح ندارد و فقط به بار خالص درون سطح بستگی دارد.
* بردار $\vec{E}$ در رابطه فوق، مربوط به کل بارها می‌شود چه بیرون سطح یا داخل سطح بسته اما سهم آن در $\oint$ فقط مربوط به بارهای داخل سطح بسته است.



$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} = \frac{q_1+q_3}{\varepsilon_0}$$

در مورد توزیع بارهای پیوسته:

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \begin{cases} \dfrac{\int \lambda dL}{\varepsilon_0} & \text{خطی} \\ \dfrac{\int \sigma dA}{\varepsilon_0} & \text{سطحی} \\ \dfrac{\int \rho dV}{\varepsilon_0} & \text{حجمی} \end{cases}$$

محاسبه میدان از روش قانون گاوس:

نکته: قانون گاوس یک ابزار ساده و به دور از پیچیدگی‌های محاسباتی است که برای محاسبه میدان ناشی از توزیع بارهای متقارن قابل استفاده است.

شرط تقارن :

در نقطه‌ای که می‌خواهیم E را حساب کنیم ، باید بتوان چنان سطح بسته‌ای (سطح گاوسی) عبور داد که روی این سطح دو شرط برقرار باشد :

① اندازهٔ E روی سطح همه جا ثابت باشد : $|\vec{E}|$: ثابت

② زاویه بین $\vec{E}$ و $\vec{dA}$ ثابت باشد .

در این صورت :

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

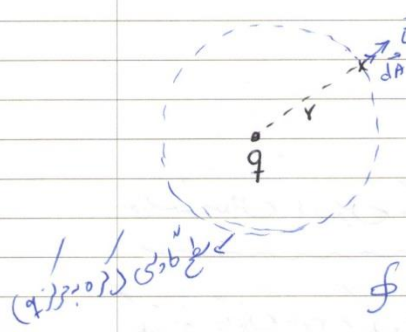
$$\oint E\, dA \cos\theta = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E\cos\theta \oint dA = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{q}{\varepsilon_0 A \cos\theta}$$

مساحت سطح بستهٔ گاوسی

* نکته : روشن است که این شرایط برای هر توزیع باری برقرار نمی‌شود .

* توجه : قانون گاوس فقط اندازهٔ $\vec{E}$ را به ما می‌دهد ، جهت $\vec{E}$ را باید قبلاً از تقارن مسئله پیدا کنیم .

مثال ← محاسبه میدان ناشی از یک بار نقطه‌ای در فاصله r از آن



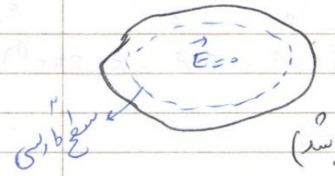
حل : یک سطح گاوسی کروی از نقطهٔ مورد نظر عبور می‌دهیم به مرکز q تا تقارن حفظ شود . در تمام نقاط روی این سطح بردار $\vec{E}$ و $\vec{dA}$ هم‌جهت هستند :

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0} \rightarrow \int E\, dA = E\int dA = EA = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$A = 4\pi r^2 \Rightarrow E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{kq}{r^2}$$ (مطابق با قانون کولن)

رساناهای منزوی باردار :

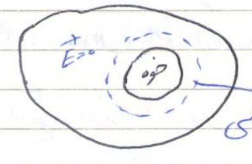
* بار اضافی داده شده به یک رسانا طوری روی سطح آن توزیع می شود که میدان داخل رسانا صفر شود یعنی تمام بار روی سطح خارجی رسانا قرار می گیرد.



$$\oint \cancel{\vec{E}}\cdot d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow q=0$$

(در شرایط تعادل الکتروستاتیک میدان داخل رسانا باید صفر باشد)

* درصورتی که رسانا دارای حفره داخلی باشد ، روی سطح دیواره هیچ بار اضافی قرار نمی گیرد.

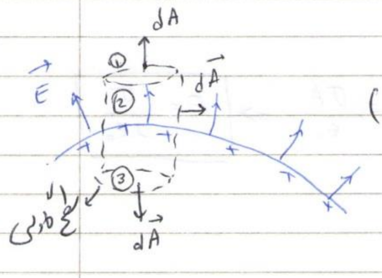


سطح گاوسی : $\oint \cancel{\vec{E}}\cdot d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow q=0$

نکته : جهت $\vec{E}$ بر سطح رسانا عمود است ، زیرا در غیر این صورت مولفه ای در راستای سطح خواهد داشت که باعث جریان بار می شود که با فرض تعادل الکتروستاتیک مغایرت دارد.

مثال) کاربرد قانون گاوس

۱- میدان درست بیرون سطح رسانا (با شکل دلخواه)

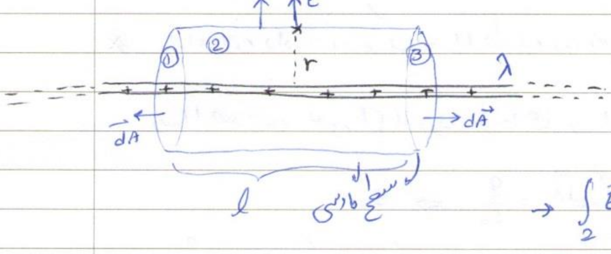


$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \int_1 \vec{E}\cdot d\vec{A} + \underbrace{\int_2 \vec{E}\cdot d\vec{A}}_{0\ (\vec{E}\perp d\vec{A})} + \underbrace{\int_3 \vec{E}\cdot d\vec{A}}_{0\ (\vec{E}=0)}$$

$$\int_1 \vec{E}\cdot d\vec{A} = \int E\,dA = E\int dA = EA = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} \qquad q_{in} = \sigma A$$

$$\rightarrow \boxed{E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$$

مثال ۲ : میدانِ ناشی از یک خط بار نامتناهی در فاصله r از آن



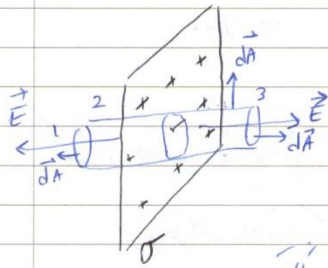
$$\oint \vec{E}\cdot\vec{dA} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$$

$$\cancel{\int_1 \vec{E}\cdot\vec{dA}} + \int_2 \vec{E}\cdot\vec{dA} + \underbrace{\cancel{\int_3 \vec{E}\cdot\vec{dA}}}_{0} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$$

$$\rightarrow \int_2 \vec{E}\cdot\vec{dA} = \int E\,dA = EA = E(2\pi r l)$$

$$\Rightarrow E(2\pi r l) = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}}$$

مثال ۳ : میدانِ ناشی از یک صفحه نامتناهی بار در نقطه‌ای نزدیک آن



سطح فرضی گاوسی را بصورت یک استوانه کوچک که در نظر می‌گیریم که محور آن عمود بر سطح صفحه باشد.

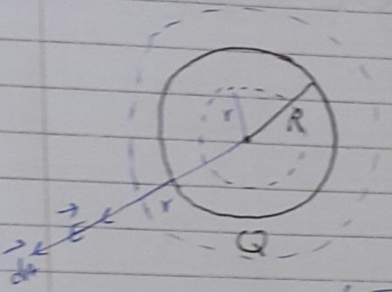
به علت تقارن انتظار داریم $\vec{E}$ در جهت عمود بر صفحه باشد (چون صفحه نامتناهی است) و روی دو قاعده مقدار ثابتی داشته باشد.

$$\oint \vec{E}\cdot\vec{dA} = \int_1 \vec{E}\cdot\vec{dA} + \underbrace{\cancel{\int_2 \vec{E}\cdot\vec{dA}}}_{0} + \int_3 \vec{E}\cdot\vec{dA}$$

$$EA + EA = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} \Rightarrow 2EA = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$

مثال ۴: میدان ناشی از یک پوسته کروی با بار Q و شعاع R درون و بیرون پوسته.

(بار Q روی کره به طور یکنواخت توزیع شده است)

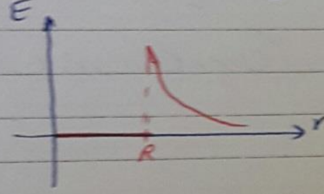


$$r<R \Rightarrow \oint \vec{E}\cdot\vec{dA} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{\vec{E}=0}$$

داخل پوسته

$$r>R \Rightarrow \oint \vec{E}\cdot\vec{dA} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{E} \parallel \vec{dA} \Rightarrow \oint E\,dA = E\oint dA = EA = E(4\pi r^2) = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$



$$\Rightarrow \boxed{E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$$

مثال ۵: کره باردار با بار Q (یکنواخت) و شعاع R. میدان در نقاط داخل و خارج آن.

(بار حجمی است)

(شکل مانند مثال قبل)

$$r<R \Rightarrow \oint \vec{E}\cdot\vec{dA} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$$

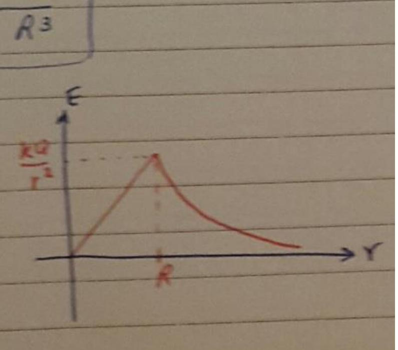
$$E(4\pi r^2) = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$$

$$\frac{Q}{V} = \frac{q_{in}}{V'} \Rightarrow q_{in} = Q\frac{V'}{V} = Q\frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} = Q\left(\frac{r}{R}\right)^3$$

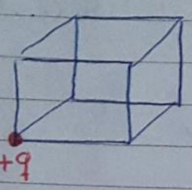
$$E(4\pi r^2) = \frac{Q r^3}{\varepsilon_0 R^3} \Rightarrow \boxed{E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qr}{R^3}}$$

$$r>R \Rightarrow \oint \vec{E}\cdot\vec{dA} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$$

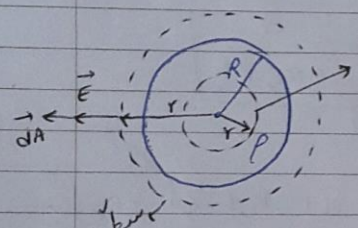
$$E(4\pi r^2) = \frac{Q}{\varepsilon_0} \rightarrow \boxed{E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}}$$



مثال: یک بار نقطه‌ای در یکی از رئوس مکعبی به ضلع a قرار گرفته است. شار میدان بار q را از این سطح مکعبی حساب کنید.



مثال: کره نارسانایی داریم با چگالی بار غیریکنواخت $\rho = \rho_0 r$. میدان ناشی از آن را در درون و بیرون کره به دست آورید.



$$\left.\begin{array}{l} r > R \\ r < R \end{array}\right\} \rightarrow E = ?$$

کل بار درون کره را حساب کنید (Q).

بیرون کره $r > R \rightarrow \oint_{S_1} \vec{E}\cdot\vec{dA} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} \rightarrow \oint E\,dA = EA = E(4\pi r^2) = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$

$q_{in} =$ کل بار کره نارسانا $= \int \rho\, dV = \int \rho_0 r\,(4\pi r^2 dr) = 4\pi\rho_0 \int_0^R r^3\, dr$

$$= 4\pi\rho_0 \left(\frac{r^4}{4}\right)_0^R = \boxed{\pi \rho_0 R^4}$$

$$\rightarrow E(4\pi r^2) = \frac{\pi\rho_0 R^4}{\varepsilon_0} \rightarrow \boxed{E = \frac{\rho_0 R^4}{4\varepsilon_0 r^2}}$$

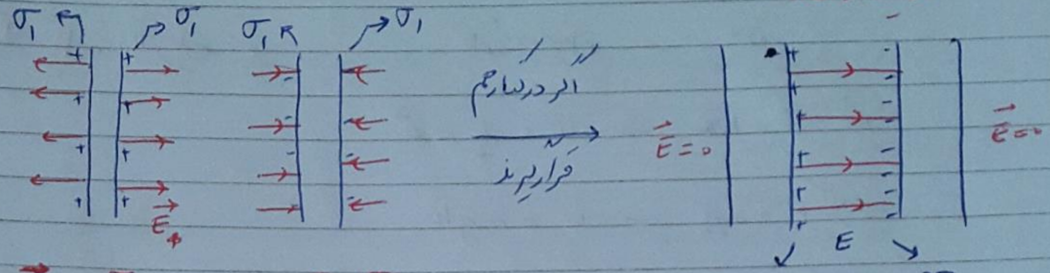
درون کره $r < R \rightarrow \oint_{S_2} \vec{E}\cdot\vec{dA} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} \rightarrow EA = E(4\pi r^2) = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$

$q_{in} =$ قسمتی از بار کره که درون سطح S_2 واقع است $= \int \rho\, dV = \int_0^r \rho_0 r\,(4\pi r^2 dr) = 4\pi\rho_0 \left(\frac{r^4}{4}\right)_0^r$

$$= \boxed{4\pi\rho_0 \frac{r^4}{4}}$$

$$\Rightarrow \boxed{E = \frac{\rho_0 r^2}{4\varepsilon_0}}$$

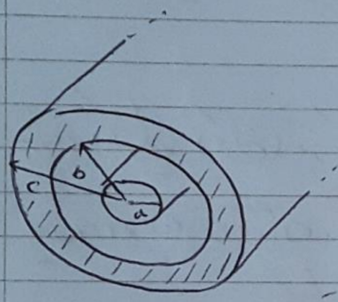
دو تیغه رسانا :



$\vec{E} = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0}$ $\qquad$ $E = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0}$

دو تیغه منزوی

بین دو تیغه $E = \frac{2\sigma_1}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$



مثال: یک پوسته استوانه ای نارسانا با چگالی بار حجمی ρ و شعاع داخلی b و شعاع خارجی c داریم به درون آن استوانه رسانایی با بار سطحی σ قرار گرفته است به طوری که هردو هم محور هستند. میدان الکتریکی را در نواحی $r<a$ ، $a<r<b$ ، $b<r<c$ و $r>c$ محاسبه کنید.