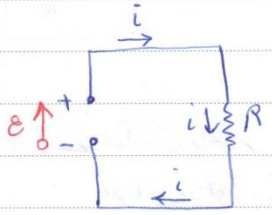
Subject:
Year. Month. Date. ( )

فصل ۷ «مدارها»



در هر بازه زمانی dt، بار dq از هر سطح مقطع مدار می‌گذرد. همین بار باید از قطب - به قطب + باتری منتقل شود. در نتیجه باتری باید روی dq، کار dW انجام دهد.

$$\varepsilon = \frac{dW}{dq} \quad \frac{J}{C} \equiv V$$ ← تعریف نیروی محرکه الکتریکی

در حالت ایده‌آل: هیچ مقاومتی در emf وجود ندارد.

در حالت واقعی: در برابر حرکت داخلی بار، باتری از خود مقاومت (داخلی) نشان می‌دهد.

محاسبه جریان در مدارهای تک حلقه‌ای:

Ⅰ روش انرژی

Ⅱ روش پتانسیل

Ⅰ

توان اتلاف انرژی در مقاومت ⇒ $P = i^2R$

انرژی تلف شده در بازه dt → $i^2R\,dt$

کار انجام شده برای dq: $dW = \varepsilon\,dq = \varepsilon\,i\,dt$

طبق اصل پایستگی انرژی → $\varepsilon i\,dt = i^2R\,dt \Rightarrow \varepsilon = iR \rightarrow \boxed{i = \frac{\varepsilon}{R}}$

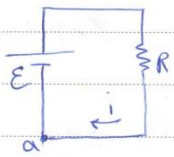
Ⅱ

قاعده حلقه: جمع جبری تغییرات پتانسیل در هر حلقه کامل برابر صفر است. (قانون اول کیرشهف)

قواعد:
- در عبور از مقاومت: اگر هم جهت جریان از مقاومت عبور کنیم ← افت پتانسیل $-iR$؛ اگر خلاف جهت جریان ← افزایش $+iR$
- در عبور از باتری: از پتانسیل کم به زیاد ← $+\varepsilon$؛ از پتانسیل زیاد به کم ← $-\varepsilon$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

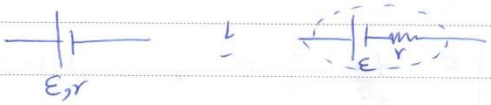


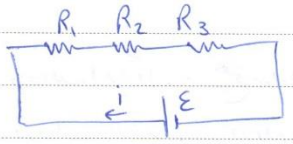
$V_a + \mathcal{E} - iR = V_a \Rightarrow \mathcal{E} = iR$, $\boxed{i = \frac{\mathcal{E}}{R}}$

← مقاومت داخلی

اگر باتری دارای مقاومت داخلی r باشد، اختلاف پتانسیل آن کاهش می‌یابد:

↳ $(\mathcal{E} - ir)$





← مقاومت‌های متوالی

$\mathcal{E} - iR_1 - iR_2 - iR_3 = 0$

$\rightarrow i = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2 + R_3}$

$\rightarrow R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3$ ↳ $\boxed{R_{eq} = \sum_{i=1}^{n} R_i}$

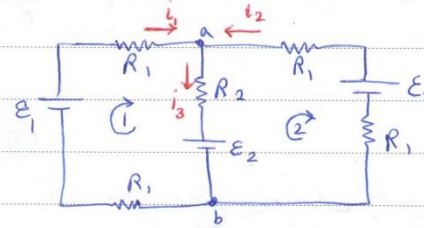
مدارهای چند حلقه:

الف) قاعده گره : جمع جبری جریان‌های ورودی به گره = جمع جبری جریان‌های خروجی از گره

$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}$

ب) مقاومت‌های موازی:

مثال: در مدار شکل مقابل، اندازه و جهت جریان را در هریک از سه شاخه به دست آورید.



$\mathcal{E}_1 = 3V$ $R_1 = 2\Omega$

$\mathcal{E}_2 = 6V$ $R_2 = 4\Omega$

① حلقه : $-i_3R_2 - \mathcal{E}_2 - i_1R_1 + \mathcal{E}_1 - i_1R_1 = 0 \Rightarrow +i_3R_2 + 2i_1R_1 = -3$

② حلقه : $\mathcal{E}_2 + i_3R_2 + i_2R_1 - \mathcal{E}_2 + i_2R_1 = 0 \Rightarrow i_3R_2 = -2i_2R_1 \Rightarrow 4i_3 = -4i_2$

a گره : $i_1 + i_2 = i_3$ $\quad i_3 = -i_2$

PqPCO

$$4(i_1+i_2)+4i_1=-3 \rightarrow \begin{cases} 8i_1+4i_2=-3 \\ i_1+i_2=-2i_2 \rightarrow i_1=-2i_2 \end{cases}$$

$$-16i_2+4i_2=-3 \rightarrow -12i_2=-3 \quad i_2=\frac{+3}{12}=\frac{1}{4}=0.25\,A$$

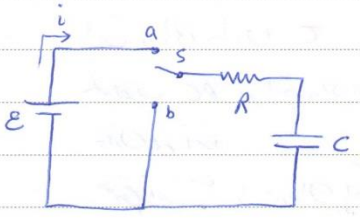
$$i_1=-0.5\,A \qquad i_3=-0.25\,A$$

علامت منفی برای جریان نشان دهنده آن است که جهت جریان در خلاف جهت انتخاب شده است.

مدارهای RC

این مدارها شامل مقاومت، باتری و خازن هستند. ویژگی این مدارها جریان متغیر با زمان است.

الف - شارژ خازن



با اتصال کلید S به نقطه a، خازن - باتری متصل می‌شود و بارداری می‌شود.

$$\varepsilon - iR - \frac{q}{C} = 0 \quad \text{از قاعده حلقه} \rightarrow \quad iR+\frac{q}{C}=\varepsilon$$

معادله دیفرانسیل مرتبه اول

$$i=\frac{dq}{dt} \Rightarrow \boxed{R\frac{dq}{dt}+\frac{q}{C}=\varepsilon}$$

$$R\frac{dq}{dt}=\varepsilon-\frac{q}{C} \qquad \frac{dq}{dt}=\frac{\varepsilon}{R}-\frac{q}{RC} \Rightarrow \int_0^q \frac{dq}{\frac{\varepsilon}{R}-\frac{q}{RC}}=\int_0^t dt$$

$$-RC\ln\left[\frac{\varepsilon}{R}-\frac{q}{RC}\right]_0^q=t \Rightarrow \ln\left(\frac{\varepsilon}{R}-\frac{q}{RC}\right)-\ln\frac{\varepsilon}{R}=\frac{-t}{RC}$$

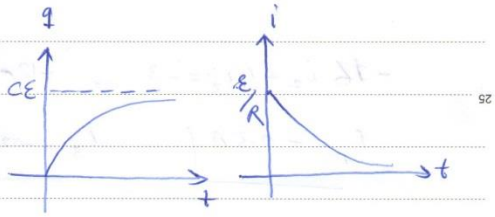
$$\ln\left(\frac{\varepsilon}{R}-\frac{q}{RC}\right)=\ln\frac{\varepsilon}{R}-\frac{t}{RC} \xrightarrow[\text{از طرفین}]{\text{توان}} \frac{\varepsilon}{R}-\frac{q}{RC}=e^{\left(\ln\frac{\varepsilon}{R}-\frac{t}{RC}\right)}$$

$$\rightarrow \frac{\varepsilon}{R}(1-e^{-t/RC})=\frac{q}{RC} \Rightarrow \boxed{q(t)=C\varepsilon(1-e^{-t/RC})} \qquad =\frac{\varepsilon}{R}e^{-t/RC}$$

با حل معادله دیفرانسیل

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{\varepsilon}{R} e^{-t/RC}$$

$$\begin{cases} t=0 \Rightarrow q=0 \ , \ i = \dfrac{\varepsilon}{R} \\ t \to \infty \Rightarrow q = C\varepsilon \ , \ i = 0 \end{cases}$$



★ اختلاف پتانسیل دو سر خازن حین پر و خالی شدن :

$$V_C = \frac{q}{C} = \varepsilon\left(1 - e^{-t/RC}\right) \qquad \begin{cases} t=0 \to V_C = 0 \\ t \to \infty \Rightarrow V_C = \varepsilon \end{cases}$$

ثابت زمانی خازن τ

حاصلضرب RC در رابطه‌های فوق را ثابت زمانی خازن می‌نامند. $\tau = RC$

مفهوم ثابت زمانی را می‌توان با جایگذاری $t = RC$ دید بهتر درک کرد :

$$q(t) = C\varepsilon\left(1 - e^{-t/RC}\right)$$

$$q(\tau) = C\varepsilon\left(1 - e^{-1}\right) = 0.63\, C\varepsilon$$

یعنی با گذشت یک ثابت زمانی، بار روی خازن به 63٪ مقدار نهایی اش می‌رسد.

پس برای رسیدن به حالت تعادل نهایی بسته به تعداد ثابت زمانی (۴ یا ۵) طول می‌کشد.

★ ★ ★ ★

نتیجه مهم ← در مدارهای RC و در هنگام شارژ خازن در زمانهای $t=0$ و $t=\infty$ داریم :

$$t=0 \Rightarrow q=0 \ , \ i = \frac{\varepsilon}{R}$$

$$t=\infty \Rightarrow q=C\varepsilon \ , \ i=0$$

یعنی : در $t=0$ خازن مانند یک سیم مستقیم عمل می‌کند و

در $t=\infty$ " " " اتصال باز " " .

Subject:
Year. Month. Date. ( )

ب) تخلیه خازن (دشارژ)

با اتصال کلید S به نقطه b ← خازن از طریق مقاومت R تخلیه می‌شود.

معادله تخلیه : $R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$

جواب معادله : $q = q_0 e^{-t/RC}$

q_0 : بار اولیه روی خازن

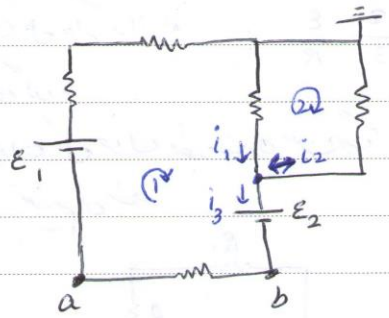
* در اولین لحظه زمانی، بار روی خازن به $3V$ مقدار اولیه خود می‌یابد.

نکته: هرچه τ بیشتر باشد، زمان تخلیه طولانی‌تر است. (τ برای خازن یا مقاومت R تنظیم کرد)

$$i = \frac{dq}{dt} = -\frac{q_0}{RC} e^{-t/RC}$$

↓
علامت منفی نشان دهنده کاهش بار خازن است.

مثال :



$\varepsilon_1 = 5V$, $\varepsilon_2 = 12V$

$R = 2\Omega$

$V_a = ?$ $V_b = ?$

حلقه ۱ : $+\varepsilon_1 - i_3R - i_3R - i_1R - \varepsilon_2 - i_3R = 0$

$-3i_3R + \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - i_1R = 0 \Rightarrow -3(2i_2)R + \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - i_2R = 0$

معادله ۲ : $i_3 = i_2 + i_1 \rightarrow \boxed{i_3 = 2i_2}$

↓

$-7i_2R = 12 - 5$

حلقه ۲ : $i_1R - i_2R = 0 \rightarrow \boxed{i_1 = i_2}$

$i_2 = \frac{12-5}{7\times 2} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}A$

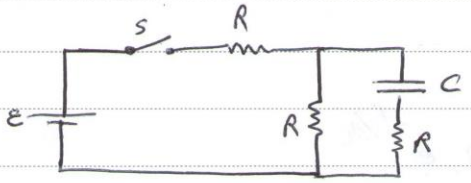
P4PCO

Subject :

Year . Month . Date . ( )

$V_a = ?$ $\quad V_a + i_3 R + \mathcal{E}_2 - i_2 R = 0$

$V_b = ?$ $\quad V_b + \mathcal{E}_2 - i_2 R = 0$



مثال: در مدار مقابل،

$\mathcal{E} = 1.2\,kV$ ، $C = 6.5\,\mu F$ ، $R = 1\,M\Omega$

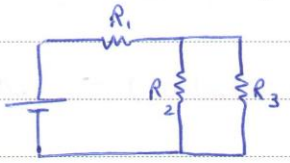
ابتدا وقتی خازن کاملا بدون بار است، کلید S

تا زمانی بسته می‌شود:

الف) در لحظه $t = 0$ جریان عبوری از هر مقاومت چقدر است؟

ب) در لحظه $t = \infty$ " " " " "

الف) $t = 0$ ← سیم رابط : خازن



$R_{eq} = R_1 + R_{23}$ $\quad R_{23} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = \frac{R}{2}$

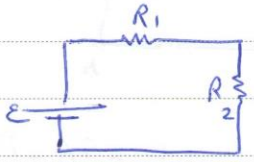
$\rightarrow R_{eq} = R + \frac{R}{2}$

$= \frac{3}{2} R$

$\mathcal{E} = i R_{eq} \rightarrow i = \frac{\mathcal{E}}{3/2\,R} = \frac{2}{3}\frac{\mathcal{E}}{R}$ ؛ جریان کل مدار که از R_1 می‌گذرد

جون کل جریان بطور مساوی بین دو شاخه تقسیم می‌شود. $\frac{i}{2} = \frac{1}{3}\frac{\mathcal{E}}{R}$: جریان گذرنده از R_2 و R_3

ب) $t = \infty$ ← اتصال باز : خازن



$R_{eq} = R_1 + R_2 = 2R$

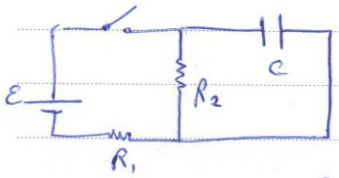
$i = \frac{\mathcal{E}}{2R}$ ← جریان گذرنده از R_1 و R_2

جریان گذرنده از $R_3 = 0$

PqPCO

Subject:

Year. Month. Date. ( )



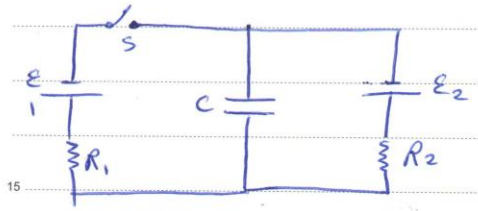
مثال: در مدار زیر ابتدا کلید را برای مدت طولانی بسته نگه می‌داریم تا حالت پایا حاصل شود. آنگاه در زمان $t=0$ کلید را باز می‌کنیم. در این حالت جریانی که در زمان $t=4\ ms$ از مقاومت R_2 می‌گذرد چقدر است؟

$R_1 = 10\ k\Omega$ $\quad \varepsilon = 20V$

$R_2 = 15\ k\Omega$ $\quad C = 0.4\ \mu F$

(تمرین)

مثال: در مدار شکل زیر، در آغاز کلید S برای مدت طولانی باز بوده است. حال اگر کلید را برای مدت طولانی بسته نگه داریم، بار روی خازن چه تغییری خواهد کرد؟



$R_1 = 0.2\ \Omega$

$R_2 = 0.4\ \Omega$

$\varepsilon_1 = 1V$

$\varepsilon_2 = 3V$

$C = 10\mu F$

(تمرین)