Subject :

Year . Month . Date . ( )

فصل نهم : «میدان مغناطیسی ناشی از جریان الکتریکی»

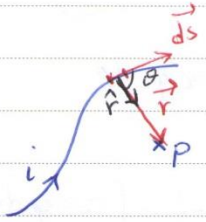
براساس یافته‌های تجربی هر ذره باردار متحرک در اطراف خود میدان مغناطیسی ایجاد می‌کند.

بار متحرک ↓ جریان الکتریکی

بنابراین در فضای اطراف آن، میدان الکتریکی و مغناطیسی بطور همزمان وجود دارند ← الکترومغناطیس

هدف این فصل : محاسبه میدان ناشی از جریان و بررسی دوروش ← قانون بیوساوار / قانون امپر.

۱- قانون بیو - ساوار



یک سیم با شکل دلخواه در نظر بگیرید که حامل جریان i باشد. می‌خواهیم میدان حاصل از این سیم را در نقطه‌ای مانند نقطه P بفاصله r از آن محاسبه کنیم.

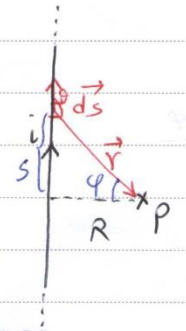
این روش مبتنی بر روش انتگرالگیری است. بنابراین ابتدا کوچکی از طول سیم ds را در نظر گرفته و میدان حاصل از آن در نقطه P از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i\,ds\sin\theta}{r^2} \quad \text{یا} \quad \vec{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i\,\vec{ds}\times\hat{r}}{r^2}$$

μ_0 : تراوایی مغناطیسی خلأ

$$\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}\ T.\frac{m}{A}$$

مثال : میدان ناشی از یک سیم بلند مستقیم حامل جریان i



$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i\,ds\sin\theta}{r^2} \qquad B = 2\int_0^{\infty} dB$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\int\frac{ds\sin\theta}{r^2}$$

P4PCO

Subject:

Year. Month. Date. ( )

در انتگرال فوق سه پارامتر متغیر r، s و θ داریم. بنابراین از یک متغیر استفاده

می‌کنیم:

$$\begin{cases} \sin\theta = \sin(\pi-\theta) = \dfrac{R}{(s^2+R^2)^{1/2}} \\ r = \sqrt{s^2+R^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{R\,ds}{(s^2+R^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 i R}{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{ds}{(s^2+R^2)^{3/2}}$$

برای حل این انتگرال از تغییر متغیر مثلثاتی $s = R\,tg\varphi$ استفاده می‌کنیم:

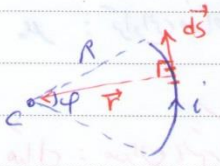
$$s = R\,tg\varphi \rightarrow ds = R(1+tg^2\varphi)d\varphi = R\sec^2\varphi\,d\varphi$$

$$\int_0^{\infty}\frac{R\sec^2\varphi\,d\varphi}{(R^2tg^2\varphi+R^2)^{3/2}} = \int\frac{R\sec^2\varphi\,d\varphi}{R^3\sec^3\varphi} = \frac{1}{R^2}\int\cos\varphi\,d\varphi$$

$$= \frac{1}{R^2}(\sin\varphi)\Big|_0^{\pi/2} = \boxed{\frac{1}{R^2}}$$

$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0 i R}{2\pi}\times\frac{1}{R^2} = \boxed{\frac{\mu_0 i}{2\pi R}}$$

مثال: کمان از دایره.



$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i\,ds\sin\theta\rightarrow 1}{r^2}$$

$$= \frac{\mu_0 i\,ds}{4\pi R^2} = \frac{\mu_0 i R\,d\varphi}{4\pi R^2}$$

$$B = \int dB = \frac{\mu_0 i R}{4\pi R^2}\int_0^{\varphi}d\varphi = \frac{\mu_0 i}{4\pi R}\varphi \rightarrow \text{زاویه رو به رو}$$

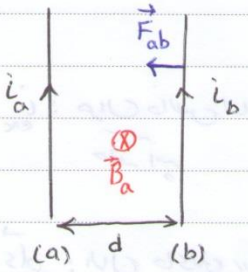
Subject:

Year. Month. Date. ( )

اگر $\varphi = 2\pi$ ← دایره کامل ← $B = \frac{\mu_0 i}{4\pi R} \times 2\pi = \frac{\mu_0 i}{2R}$

میدان مغناطیسی در مرکز یک حلقه دایره‌ای حامل جریان.

نیروی بین دو جریان موازی:



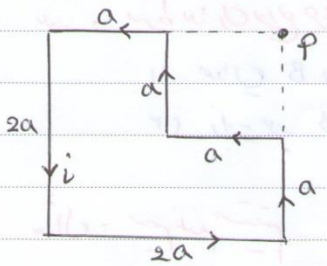
میدان حاصل از سیم a در محل سیم b: $B_a = \frac{\mu_0 i_a}{2\pi d}$

$F_{ab} = i_b l B_a = i_b l \frac{\mu_0 i_a}{2\pi d} = \frac{\mu_0 l i_a i_b}{2\pi d}$

نیروی F_{ba} هم برابر F_{ab} و در خلاف جهت آن است.

نتیجه: جریان‌های موازی همدیگر را جذب و جریان‌های پادموازی همدیگر را دفع می‌کنند.

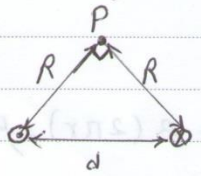
مثال: میدان مغناطیسی حاصل از حلقهٔ جریان زیر را در نقطهٔ P به دست آورید.



(حل کنید)

مثال:

دو سیم بلند موازی حامل جریان‌های i_1 و i_2 در خلاف جهت یکدیگر مطابق شکل به فاصلهٔ d از یکدیگر قرار دارند. میدان مغناطیسی برآیند را در نقطهٔ P به دست آورید.



$i_1 = 15A$ $\quad d = 5.3\,cm$

$i_2 = 32A$

(حل کنید)

Subject:
Year. Month. Date. ( )

قانون آمپر :

میدان مغناطیسی برایند ناشی از هر توزیع جریان متقارنی را می‌توان با استفاده از قانون آمپر محاسبه کرد.

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i_{enc}$$

↓ روی حلقه بسته (حلقه آمپر)

i_{enc} : جریان خالص احاطه شده توسط حلقه آمپر

$d\vec{s}$: بردار جابجایی روی مسیر حلقه آمپر (برداری در راستا یا خلاف جهت جریان در نظر گرفته می‌شود) ← یا جهت دلخواه

نکته : ابتدا به قانون "کاوش" جهت میدان $\vec{B}$ را با مد ابتدا خودمان مشخص کنیم. قانون آمپر فقط اندازه میدان را به ما می‌دهد.

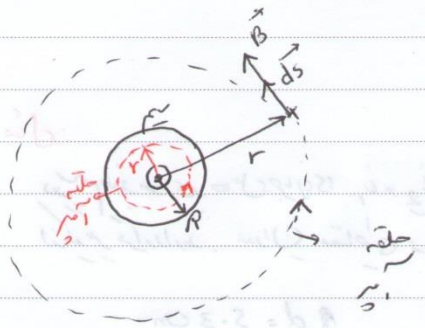
نکته : شرط تقارن توزیع جریان به این معنی است که بتوان حلقه آمپری را در نظر گرفت که

۱) میدان B روی آن ثابت باشد

۲) زاویه بین B و ds ثابت باشد

مثال : سیم بلند مستقیم

الف) میدان در بیرون سیم :



$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i_{enc}$$

حلقه آمپر

$$\oint B\, ds \underbrace{\cos\theta}_{1} = \oint B\, ds = B \oint ds = B(2\pi r) = \mu_0 i$$

B ثابت

$$\rightarrow B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

PAPCO

Subject:

Year. Month. Date. ( )

ب) میدان درون سیم:

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = B(2\pi r) = \mu_0 i_{enc}$$

$$i_{enc} = i\frac{\pi r^2}{\pi R^2} = i\frac{r^2}{R^2} \rightarrow B = \frac{\mu_0 i r^2}{2\pi r R^2} = \frac{\mu_0 i}{2\pi R^2} r$$

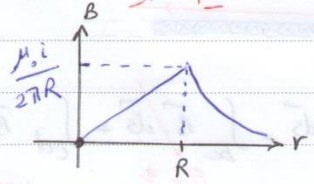
در مرکز سیم $r=0 \leftarrow B=0$

بیشینه میدان $\leftarrow B_{max}$ در $r=R$

تغییرات میدان حاصل از سیم در بیرون و درون آن:

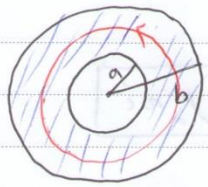
$$B_{out} \propto \frac{1}{r}$$

$$B_{in} \propto r$$



مثال: یک پوسته استوانه‌ای رسانای بلند با شعاع داخلی a و شعاع خارجی b حامل جریانی با چگالی $J = cr^2$ می‌باشد. (جهت جریان بر لبه است)

میدان مغناطیسی را در $a<r<b$ و $r>b$ و $r<a$ محاسبه کنید.



$r<a \rightarrow \oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 i_{enc}^{0} \rightarrow \vec{B} = 0$

$a<r<b \rightarrow \oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = B(2\pi r) = \mu_0 i_{enc}$

$$i_{enc} = \int J\,dA = \int cr^2(2\pi r)dr = 2\pi c\frac{r^4}{4}\Big|_a^r = \frac{\pi c}{2}(r^4-a^4)$$

$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0 c(r^4-a^4)}{4r}$$

$r>b \rightarrow \oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 i_{enc}$ $\quad i_{enc} = \int J\,dA = \int_a^b cr^2(2\pi r)dr$

$$= \frac{\pi c}{2}(b^4-a^4)$$

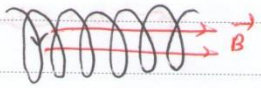
$$\rightarrow B = \frac{\mu_0 c(b^4-a^4)}{4r}$$

P4PCO

Subject :

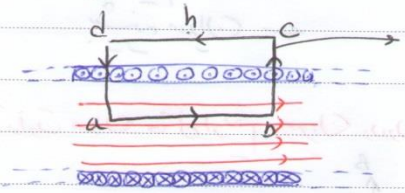
Year . Month . Date . ( )

میدان مغناطیسی سیملوله



فرض: طول سیملوله >> قطر سیملوله

★ برای یک سیملوله آرمانی (سیملوله بی‌نهایت بلند با پیچ‌های چسبیده به هم) میدان درون سیملوله یکنواخت و موازی محور مرکزی آن است. و میدان مغناطیسی خارج از سیملوله صفر است.



حلقه آمپر

$$\oint_{abcd} \vec{B}.\vec{ds} = \mu_0 i_{enc}$$

$$\int_{ab} \vec{B}.\vec{ds} + \int_{bc} \vec{B}.\vec{ds} + \int_{cd} \vec{B}.\vec{ds} + \int_{da} \vec{B}.\vec{ds} = \mu_0 i_{enc}$$

$\theta = \pi/2$; خارج سیملوله ; $\theta = \pi/2$

i_{enc} = تعداد پیچ‌ها × i

تعداد دور در واحد طول = $\frac{N}{L}$ (L: طول سیملوله)

تعداد دورها در حلقه آمپر = nh ; n: تعداد دورها سیملوله در واحد طول

$$\rightarrow i_{enc} = inh$$

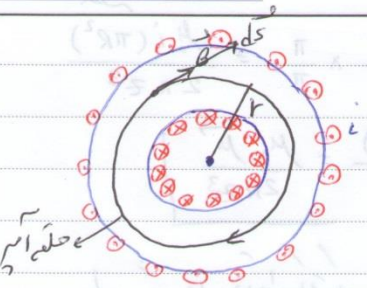
$$\Rightarrow Bh = \mu_0 inh \rightarrow \boxed{B = \mu_0 ni}$$

سیملوله روشی است برای تولید میدان مغناطیسی یکنواخت مشابه خازن که برای تولید میدان الکتریکی یکنواخت استفاده می‌شد.

Subject:

Year. Month. Date. ( )

میدان مغناطیسی چنبره

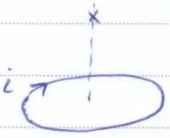


$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = B\oint ds = B(2\pi r) = \mu_0 i_{enc}$$

$$i_{enc} = Ni \rightarrow B = \frac{\mu_0 N i}{2\pi r}$$

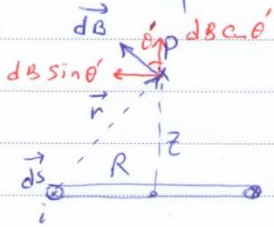
→ میدان B در سطح مقطع چنبره ثابت نیست.

پیچه حامل جریان به عنوان دوقطبی مغناطیسی



می‌خواهیم میدان حاصل از یک پیچه حامل جریان را بر روی محور پیچه محاسبه کنیم.

برای این کار نمی‌توان از قانون آمپر استفاده کرد چون تقارن لازم وجود ندارد.



$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i\,ds\,\sin\theta^{\to 90^\circ}}{r^2} = \frac{\mu_0 i\,ds}{4\pi r^2}$$

مولفه‌های افقی (x) همدیگر را خنثی می‌کنند و مولفه‌های y با هم جمع می‌شوند.

$$dB_y = dB\cos\theta' = \frac{\mu_0 i\,ds\cos\theta'}{4\pi r^2}$$

$$B = \int dB_y = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\int \frac{ds\cos\theta'}{r^2} \quad \begin{cases} r^2 = z^2 + R^2 \\ \cos\theta' = \frac{R}{r} = \frac{R}{\sqrt{z^2+R^2}} \end{cases}$$

$$\rightarrow B = \frac{\mu_0 i R}{4\pi (z^2+R^2)^{3/2}}\int ds = \frac{\mu_0 i R (2\pi R)}{4\pi (z^2+R^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{\mu_0 i R^2}{2(z^2+R^2)^{3/2}}$$

P4PCO

Subject :

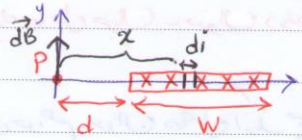
Year . Month . Date . ( )

$z \gg R \Rightarrow B \sim \frac{\mu_0 i R^2}{2z^3} \times \frac{\pi}{\pi} = \frac{\mu_0 i (\pi R^2)}{2\pi z^3}$ (A روی πR^2)

برای N دور پیچه : $\vec{B} \sim \frac{\mu_0 (N i A)}{2\pi z^3} = \frac{\mu_0 \vec{\mu}}{2\pi z^3}$

$E = \frac{P}{2\pi \varepsilon_0 x^3}$ ← مشابه برای دو قطبی الکتریکی در فاصله دور از آن داشتیم :

مثال : نوار نازک و بلندی به عرض W حامل جریان کل i (در جهت درون‌سو) است. میدان مغناطیسی $\vec{B}$ ناشی از آن را در نقطه P به فاصله d از نوار به دست آورید (شکل سطح مقطع نوار را نشان می‌دهد)



ابتدا به شکل سیم نازک با ضخامت dx در نظر می‌گیریم

$\vec{dB} = \frac{\mu_0 di}{2\pi x} \hat{j}$: میدان ناشی از این المان در نقطه P برابر است با

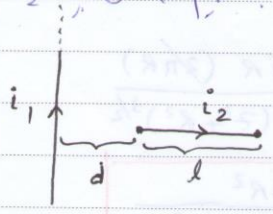
$B = \int dB = \int \frac{\mu_0 di}{2\pi x} = \frac{\mu_0}{2\pi} \int \frac{J dx}{x} = \frac{\mu_0 i}{2\pi W} \int_d^{d+W} \frac{dx}{x}$

$= \frac{\mu_0 i}{2\pi W} \ln x \Big|_d^{d+W} = \frac{\mu_0 i}{2\pi W} \ln\left(\frac{d+W}{d}\right)$

$J = \frac{i}{A} \Rightarrow \frac{i}{W \cdot 1}$

میدان برآیند در جهت $\hat{j}$ است.

مثال : در شکل مقابل نیروی که از طرف سیم بلند سمت چپ (۱) به قطعه سیم (۲) حامل جریان i_2 وارد می‌شود را محاسبه کنید.



(حل کنید)

PAPCO